GAL (I INF)

Kolokwium nr 1

29-11-2010

Uwaga: każde zadanie warte jest 4 punkty, niezależnie od stopnia trudności.

Zadanie 1. Niech

$$p_\xi(z) \;=\; |\imath + z|^2 + \xi \cdot z + 3, \qquad (\imath = \sqrt{-1})$$

będzie funkcją zmiennej zespolonej z. Dla jakich rzeczywistych wartości ξ funkcja ta ma następującą własność: jeśli $p_\xi(u) = 0$ to również $p_\xi(\overline{u}) = 0$ (gdzie $\overline{u}$ oznacza liczbę sprzężoną do liczby zespolonej u).

Zadanie 2. Wyznacz macierz $X = (A^H * A^T) + A^{-1}$ dla

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & \imath & -1 & -\imath \\ 0 & 1 & \imath & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \imath \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\imath = \sqrt{-1}).$$

Zadanie 3. Niech $\vec{u} \in \mathbf{R}^n$ będzie wektorem o normie drugiej $\|\vec{u}\|_2 = \sqrt{\vec{u}^T * \vec{u}} = 1$. Znajdź normę drugą macierzy

$$H \;=\; I_n - 2 * \vec{u} * \vec{u}^T \in \mathbf{R}^{n,n}$$

(gdzie $I_n \in \mathbf{R}^{n,n}$ jest macierzą identycznościową).

Zadanie 4. Niech $\mathcal{Y}$ będzie podprzestrzenią $\mathbf{R}^5$ zdefiniowaną jako

$$\mathcal{Y} \;=\; \{\, \vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \in \mathbf{R}^5 : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0, \; x_3 + x_4 + x_5 = 0 \,\}.$$

Znajdź bazę $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5)$ w $\mathbf{R}^5$ taką, że $\mathcal{Y} = \mathrm{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s)$ dla pewnego s. Ile wynosi s i czy jest wyznaczone jednoznacznie?

Zadanie 5. Niech $V \in \mathbf{C}^{n,n}$ będzie macierzą kwadratową, której rząd wynosi n. Niech dalej $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ będą kolejnymi kolumnami macierzy V. Wykaż, że wtedy układ macierzy

$$M_{i,j} \;=\; \vec{v}_i * \vec{v}_j^T, \qquad 1 \le i, j \le n,$$

jest bazą przestrzeni $\mathbf{C}^{n,n}$.

Wskazówka. Dla każdego j mamy $\vec{v}_j = V * \vec{e}_j$ gdzie $\vec{e}_j$ jest j-tym wersorem.