GAL (I INF)
Kolokwium nr 2
16-01-2010

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1.
Niech $\mathbb{A} = [p_1, p_2, p_3, p_4] \in \mathcal{X}^{1,4}$ będzie podaną bazą wielomianów, a $\mathbb{S} = \mathbb{A}^{-1} \in (\mathcal{X}^*)^{4,1}$ bazą do niej sprzężoną. Jeśli $s = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i s_i$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, to z definicji bazy sprzężonej mamy

$$s(p_j) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i s_i(p_j) = \alpha_j,$$

a stąd

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(p_1) \\ s(p_2) \\ s(p_3) \\ s(p_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Uwaga. W skrótowym zapisie rozwiązanie wygląda następująco:

$$s = \vec{\alpha}^T * \mathbb{A}^{-1} \iff \vec{\alpha}^T = s \cdot \mathbb{A} = [s(p_1), s(p_2), s(p_3), s(p_4)] = [4, 0, -1, 7].$$

Zadanie 2.
Macierz układu równań wygląda nastepująco:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ -1 & a & -2 & | & 3 \\ -2 & a+1 & a-1 & | & a^2 \end{bmatrix}.$$

Za pomocą operacji elementarnych na wierszach (eliminacja Gaussa) doprowadzamy tą macierz do postaci trójkątnej górnej:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & a+2 & | & a^2-4 \end{bmatrix}.$$

Dany układ równań ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie elementy na głównej diagonali macierzy równania są niezerowe. Stąd $a \in \mathbf{R} \setminus \{1, -2\}$ i w konsekwencji

$$z = a - 2, \quad y = \frac{a}{a-1}, \quad x = \frac{1}{a-1} - a + 2.$$

Gdy $a = 1$ to macierz układu możemy doprowadzić do postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

W tym przypadku układ jest sprzeczny.

Gdy $a = -2$ to ostatni wiersz macierzy się zeruje i otrzymujemy układ nieoznaczony

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -3 & -1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

W tym przypadku rozwiązaniem szczególnym jest np. wektor $\left[-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right]^T$, natomiast zbiór wszystkich rozwiązań tworzy warstwę

$$\mathcal{W}\left(\left[-\tfrac{5}{3}, -\tfrac{2}{3}, 0\right]^T, \text{span}\left(\left[-\tfrac{4}{3}, -\tfrac{1}{3}, 1\right]^T\right)\right).$$

Zadanie 3.
Niech $L_1 \in \text{TRIL}^{n,n}$ ($l_{i,i} = 1$, $1 \le i \le n$) oraz $R_1 \in \text{TRIU}^{n,n}$ będą macierzami, które pochodzą ze standardowej eliminacji Gaussa (bez przestawień wierszy i kolumn), tzn. $L_1 * A = R_1$. Macierze te mają współczynniki wymierne, ponieważ wykonujemy tylko operacje arytmetyczne na liczbach wymiernych. Niech q będzie wspólnym mianownikiem wszystkich elementów macierzy L_1 i R_1. Podstawiając $L = q * L_1$ i $R = q * R_1$ mamy $L * A = R$, czyli $A = L^{-1} * R$, gdzie macierze $L \in \text{TRIL}^{n,n}$ i $R \in \text{TRIU}^{n,n}$ mają współczynniki całkowite.

Zadanie 4.
Dla wielomianu $p(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j$ zapisanego w bazie $1, t, \ldots, t^{n-1}$ mamy

$$f(p) = \begin{bmatrix} a_0 \\ \sum_{j=0}^{n-1} a_j \\ \sum_{j=0}^{n-1} a_j 2^j \end{bmatrix}.$$

Stąd widać, że w bazie $1, t, \ldots, t^{n-1}$ w $\mathcal{P}^n_{|\mathbf{R}}$ i w bazie $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ w $\mathbf{R}^3$ przekształcenie f ma macierz

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz przejścia z bazy $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ do bazy danej w zadaniu wynosi

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

to szukana macierz przekształcenia f jest równa $C^{-1} * F$. Liczymy C^{-1} (**w pracy na kolokwium trzeba podać rachunki**) otrzymując

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

skąd

$$A^{-1} * F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \ldots & -1 \\ 1-1 & 1-2 & \ldots & 1-2^{n-1} \\ 1 & 2 & \ldots & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5.
Ponieważ $\det(A^2) = (\det(A))^2$ to

$$\det(A^2) = 1 \iff (\det(A))^2 = 1 \iff \det(A) - 1) \in \{+1, -1\}.$$

Upraszczając wyznacznik $\det(A)$ poprzez odjęcie pierwszego wiersza od ostatniego, rozwinięcie względem pierwszej kolumny, a w końcu zastosowanie bezpośredniego wzoru dla macierzy formatu

3×3 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ \lambda - 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 1.
\end{aligned}$$

W efekcie dostajemy równania trzeciego stopnia, $\det(A) = 1$ oraz $\det(A) = -1$, czyli odpowiednio $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0$ i $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Ponieważ

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0 \iff \lambda \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 2) = 0,$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \iff \lambda^2(\lambda - 1) - 2(\lambda - 1) = 0 \iff (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2) = 0,$$

ostateczna odpowiedź brzmi

$$\det(A^2) = 1 \iff \lambda \in \{0, \pm 1, \pm\sqrt{2}, 2\}.$$