GAL (I INF)

Kolokwium nr 2
16-01-2010

Uwaga: każde zadanie warte jest 6 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

Zadanie 1. Niech $\mathcal{X} = \mathcal{P}^4_{|\mathbf{R}}$ będzie przestrzenią wielomianów stopnia co najwyżej 3, o współczynnikach rzeczywistych, a $s \in \mathcal{X}^*$ funkcjonałem liniowym,

$$s(p) = p(0) + p(1) + p'(1), \qquad p \in \mathcal{X}.$$

Znajdź współczynniki rozwinięcia funkcjonału s w bazie sprzężonej z bazą wielomianów

$$1 + t, 1 - t, t^2 - t^3, t^2 + t^3.$$

Zadanie 2. Wyznacz w zależności od wartości parametru $a \in \mathbf{R}$ zbiór rozwiązań układu równań

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & -1 \\ -x & + & ay & - & 2z & = & 3 \\ -2x & + & (a+1)y & + & (a-1)z & = & a^2 \end{array} \right.$$

Zadanie 3. Niech $A \in \mathbf{R}^{n,n}$ będzie macierzą nieosobliwą o współczynnikach całkowitych. Wykaż że jeśli eliminacja Gaussa dla macierzy A jest wykonalna bez przestawień wierszy i kolumn to istnieją takie macierze $L \in \mathrm{TRIL}^{n,n}$ (niekoniecznie z jedynkami na głównej przekątnej) oraz $U \in \mathrm{TRIU}^{n,n}$ o współczynikach całkowitych, że $A = L^{-1} * U$.

Zadanie 4. Niech $f : \mathcal{P}^n_{|\mathbf{R}} \to \mathbf{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym danym wzorem

$$f(p) = [p(0), p(1), p(2)]^T.$$

Wypisz macierz f w bazach $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ przestrzeni $\mathcal{P}^n_{|\mathbf{R}}$ oraz $[1, 0, 0]^T$, $[1, 1, 0]^T$, $[1, 1, 1]^T$ przestrzeni $\mathbf{R}^3$.

Zadanie 5. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dla jakich $\lambda \in \mathbf{R}$ mamy $\det(\mathrm{A}^2) = 1$?