GAL (I INF)
Kolokwium nr 1
28-11-2009

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1.
Jeżeli $z = 1$ to równość $\sum_{k=0}^{n} z^k = 1$ nie zachodzi dla żadnego $n \in \mathbf{N}$ (przyjmujemy, że $0 \notin \mathbf{N}$). Dalej zakładamy, że $z \neq 1$. Korzystając ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego dostajemy

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1},$$

czyli szukamy rozwiązań zespolonych równania

$$\frac{z^{n+1}-1}{z-1} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z^{n+1} - 1 = z - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad z(z^n - 1) = 0.$$

Zatem $z = 0$ (i formalnie to rozwiązanie należy odrzucić gdyż 0^0 nie ma określonej wartości), albo z jest pierwiastkiem stopnia n z jedności. To oznacza, że

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + \imath \sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

($k = 0$ odrzucamy, gdyż $z \neq 1$!)

Zadanie 2.
Pokażemy najpierw, że $\mathcal{R}(A * A^H) = \mathcal{R}(A)$. Rzeczywiście, wobec tego, że $\mathbf{C}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^H)$ (patrz WYKŁAD) mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) &= \{A * \vec{x} : \vec{x} \in \mathbf{C}^n\} = \{A * (\vec{x}_0 + \vec{x}_1) : \vec{x}_0 \in \mathcal{N}(A), \vec{x}_1 \in \mathcal{R}(A^H)\} \\ &= \{A * \vec{x}_1 : \vec{x}_1 \in \mathcal{R}(A^H)\} = \mathcal{R}(A * A^H). \end{aligned}$$

Stąd, w szczególności, $\mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(A * A^H)$.

Jeśli teraz macierz $A * A^H \in \mathbf{C}^{m,m}$ jest nieosobliwa to jej kolumny są liniowo niezależne i jej rząd wynosi m. A więc

$$m = \mathrm{rz}(A * A^H) = \mathrm{rz}(A) = \min(m, n),$$

skąd $m \leq n$.

Jeśli zaś $m \leq n$ to $\mathrm{rz}(A * A^H) = \mathrm{rz}(A) = m$, czyli kolumny macierzy $A * A^H$ są liniowo niezależne, a więc jest ona nieosobliwa.

Zadanie 3.
Najpierw obliczamy:

$$\begin{aligned} \left|\tfrac{1}{2} + \imath\tfrac{\sqrt{3}}{4}\right| &= \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{16}\right)^{1/2} = \tfrac{\sqrt{7}}{4}, \qquad \left|2 - \imath\sqrt{5}\right| = (4+5)^{1/2} = 3, \\ \left|\sqrt{\imath}\right| &= \left|(\cos\pi + \imath\sin\pi)^{1/2}\right| = \left|\cos\tfrac{\pi}{2} + \imath\sin\tfrac{\pi}{2}\right| = \left|\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\imath)\right| = 1. \end{aligned}$$

Stąd

$$|A| = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{7}}{4} & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\|A\|_\infty &= \max_{1\le i\le 2}\sum_{j=1}^{3}|a_{i,j}| = \max\left(\tfrac{\sqrt{7}}{4}+3+2, 1+1+4\right) = 6,\\
\|A\|_1 &= \max_{1\le j\le 3}\sum_{i=1}^{2}|a_{i,j}| = \max\left(\tfrac{\sqrt{7}}{4}+1, 3+1, 2+4\right) = 6,\\
\|A\|_F &= \left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}|a_{i,j}|^2\right)^{1/2} = \left(\frac{7}{16}+9+4+1+1+16\right)^{1/2} = \tfrac{\sqrt{503}}{4}.
\end{aligned}$$

Ponieważ norma ∞ jest “wybijana” na drugim wierszu macierzy A to równość $\|A*\vec{x}\|_\infty = \|A\|_\infty \cdot \|\vec{x}\|_\infty$ ma miejsce dla

$$\vec{x} = \left(\frac{|a_{2,j}|}{a_{2,j}}\right)_{j=1}^{3} = \begin{bmatrix} -1\\ 1/\sqrt{\imath}\\ -1/\imath \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\\ \sqrt{2}(1-\imath)\\ \imath \end{bmatrix} \neq \vec{0}.$$

Zadanie 4.
Zauważmy najpierw, że $\dim(\mathcal{Y}) = 2$.

Jeśli

$$\alpha = \beta = 0$$

to podprzestrzeń $\mathcal{Z}$ jest rozpięta na wektorze $[1, 2, -1, 0]^T$, który nie należy do $\mathcal{Y}$. W konsekwencji suma $\mathcal{Y} + \mathcal{Z}$ jest sumą prostą, a jej wymiar wynosi $2 + 1 = 3$.

Dalej zakładamy, że $\alpha \neq 0$ lub $\beta \neq 0$. Wtedy $\vec{z}_1$ i $\vec{z}_2$ są liniowo niezależne i $\dim(\mathcal{Z}) = 2$.

Przedstawmy $\vec{z} \in \mathcal{Z}$ w postaci

$$\vec{z} = a*\vec{z}_1 + b*\vec{z}_2 = \begin{bmatrix} a-\alpha b\\ 2a+\alpha b\\ -a+\alpha b\\ \alpha a+\beta b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Wektor $\vec{z} \in \mathcal{Z}$ należy również do $\mathcal{Y}$ gdy dodatkowo spełnia oba równania określające $\mathcal{Y}$. Sprawdzamy, że oba równania są dla $\vec{z} \in \mathcal{Z}$ równoważne i dlatego wystarczy ograniczyć się do pierwszego z nich. Otrzymujemy

(1) $$(\alpha+2)a + (\alpha+\beta)b = 0.$$

Ponieważ równanie to ma niezerowe rozwiązanie to suma podprzestrzeni $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{Z}$ nie jest sumą prostą. Pozostaje znaleźć wymiar podprzestrzeni $\mathcal{Y} + \mathcal{Z}$.

W tym celu zauważamy, że jeśli $\alpha = -2$ i $\beta = 2$ to równanie (1) jest spełnione dla dowolnych a i b, co oznacza, że $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$. W tym przypadku mamy więc

$$\dim(\mathcal{Y}+\mathcal{Z}) = \dim(\mathcal{Y}) = 2.$$

Jeśli zaś $\alpha \neq -2$ albo $\beta \neq 2$ to $\dim(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}) = 1$ oraz

$$\dim(\mathcal{Y}+\mathcal{Z}) = \dim(\mathcal{Y}) + \dim(\mathcal{Z}) - \dim(\mathcal{Y}\cap\mathcal{Z}) = 2+2-1 = 3.$$

Ostatecznie otrzymaliśmy

$$\dim(\mathcal{Y}+\mathcal{Z}) = \begin{cases} 2 & \text{dla } (\alpha,\beta) = (-2,2)\},\\ 3 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Suma podprzestrzeni $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{Z}$ jest sumą prostą jedynie w przypadku $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

Zadanie 5.
Odejmując wiersz trzeci macierzy od wiersza pierwszego, a następnie dodając go do drugiego otrzymujemy macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 3 & \lambda+2 \end{bmatrix}.$$

Następnie odejmujemy od wiersza drugiego wiersz pierwszy, od wiersza czwartego wiersz drugi i przestawiamy wiersz trzeci na początek. Otrzymujemy macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ponieważ jest to macierz trójkątna, jej nieosobliwość jest równoważna niezerowaniu się wszystkich elementów na głównej przekątnej. Stąd dla $\lambda \neq 0$ mamy $\mathrm{rz}(A) = 4$.

Z kolei dla $\lambda = 0$ czwarty wiersz jest zerowy, a pozostałe są już liniowo niezależne. A to oznacza, że $\mathrm{rz}(A) = 3$.