GAL (I INF)

Kolokwium nr 1
28-11-2009

Uwaga: każde zadanie warte jest 6 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

Zadanie 1. Dla danej liczby naturalnej n znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające równanie

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = 1.$$

Zadanie 2. Niech macierz $A \in \mathbf{C}^{m,n}$ będzie pełnego rzędu, tzn. $\mathrm{rz}(A) = \min(m,n)$. Wykaż, że macierz $A * A^H$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy gdy $m \le n$.

Zadanie 3. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{4} & 2 - \imath\sqrt{5} & 2 \\ -1 & \sqrt{\imath} & -4\imath \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{2,3}$$

oblicz normy $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ i $\|A\|_F$ (norma Frobeniusa). Znajdź niezerowy wektor $\vec{x} \in \mathbf{C}^3$ dla którego

$$\|A * \vec{x}\|_\infty = \|A\|_\infty \cdot \|\vec{x}\|_\infty.$$

Zadanie 4. W przestrzeni $\mathbf{R}^4_{|\mathbf{R}}$ podprzestrzeń $\mathcal{Y}$ składa się z wektorów $\vec{x}$ spełniających jednocześnie równania

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \end{aligned}$$

a podprzestrzeń $\mathcal{Z} = \mathrm{span}(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$, gdzie

$$\vec{z}_1 = [1, 2, -1, \alpha]^T, \qquad \vec{z}_2 = [-\alpha, \alpha, \alpha, \beta]^T.$$

Zbadaj wymiar sumy $\mathcal{Y} + \mathcal{Z}$ w zależności od parametrów α i β. Czy ta suma jest sumą prostą?

Zadanie 5. Wyznacz rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\lambda & 3 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 3 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{4,4}$$

w zależności od parametru rzeczywistego λ.
Wskazówka. Rząd macierzy nie zmieni się jeśli do kolumny (wiersza) dodamy liniową kombinację innych kolumn (wierszy).