GAL (I INF)
EGZAMIN (II termin)
5 marca 2011

UWAGI.
(i) Poszczególne zadania należy oddawać na osobnych kartkach podpisanych imieniem i nazwiskiem.
(ii) Każde zadanie warte jest 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

Zadanie 1. Niech

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \imath \\ 1+\imath \\ 1-\imath \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^3 \qquad\qquad (\imath = \sqrt{-1})$$

oraz $A = \vec{u} * \vec{u}^H$. Oblicz normy $\|A\|_p$ dla $p = 1, 2, \infty$.

Zadanie 2. Macierz $A \in \mathbf{R}^{n,n}$ jest trójkątna górna i

$$\operatorname{rank}(A - k \cdot I_n) < n \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Oblicz sumę wyrazów na przekątnej macierzy A.

Zadanie 3. Odwzorowanie $f : \mathbf{R}^{2,4} \mapsto \mathcal{P}^3_{\mathbf{R}}$ jest zdefiniowane następująco: jeżeli $f(A) = p(t)$, to

$$p(t) = [1, 1] * A * \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ -t \\ t^2 \end{bmatrix}.$$

Wykaż, że f jest przekształceniem liniowym. Wyznacz wymiar jądra przekształcenia f. Znajdź podprzestrzeń $\mathcal{X} \subset \mathbf{R}^{2,4}$ taką, że $f|_{\mathcal{X}}$ (tzn. f obcięte do dziedziny $\mathcal{X}$) jest izomorfizmem $\mathcal{X}$ i $\mathcal{P}^3_{\mathbf{R}}$.

Zadanie 4. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będzie bazą przestrzeni liniowej $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$. Wykaż, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{K}$ istnieje funkcjonał $s \in \mathcal{X}^*_{|\mathbf{K}}$ taki, że

$$s(x_k) = a_k \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Zadanie 5. Znajdź w $\mathbf{R}^4$ rozwiązanie ogólne układu równań liniowych

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 6x_1 & + & 9x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \end{array}\right. .$$

Zadanie 6. Niech przekształcenie liniowe $f : \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^3$ dane będzie wzorem

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \\ 2x+3y \end{bmatrix}.$$

Wyznacz macierz przekształcenia f w bazach

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \quad \text{i} \quad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

odpowiednio przestrzeni $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$.

Zadanie 7. Niech wielomian

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Wykaż, że dla wszystkich argumentów x wartość tego wielomianu można zapisać jako

$$p(x) = \det{}_n\left(\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{bmatrix}\right).$$

Zadanie 8. Niech $h : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ będzie formą kwadratową daną wzorem

$$h([x_1, x_2, x_3]^T) = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

Znajdź macierz tej formy w bazie

$$(\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

Czy forma ta jest dodatnio określona?