GAL (I INF)

Egzamin (I termin)
3-02-2010

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1.
Macierz A jest nieosobliwa, a to oznacza, że $\mathrm{rz}(A*X) = \mathrm{rz}(X)$. Z warunku $\mathcal{R}(A*X) = \mathcal{R}(B)$ wynika, że $\mathrm{rz}(A*X) = \mathrm{rz}(B)$, a stąd $\mathrm{rz}(X) = \mathrm{rz}(B)$. Łatwo sprawdzić, że $\mathrm{rz}(B) = 2$ i tyle właśnie wynosi rząd macierzy X.

Przykładem takiej macierzy X jest

$$A^{-1} * B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \\ -5 & 2 & -7 \end{bmatrix}.$$

Macierz X nie jest wyznaczona jednoznacznie, bo jeżeli X spełnia równanie $\mathcal{R}(A*X) = \mathcal{R}(B)$ to dla $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ mamy także $\mathcal{R}(A*(aX)) = \mathcal{R}(B)$.

Zadanie 2.
Jeżeli $A \in \mathcal{A}$ i $a \in \mathbf{R}$ to $\mathcal{R}(aA) = \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{Y}$. Jeżeli $A, B \in \mathcal{A}$ to

$$\mathcal{R}(A+B) \subset \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) \subset \mathcal{Y} + \mathcal{Y} = \mathcal{Y}.$$

Stąd $\mathcal{A}$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbf{R}^{4,4}$.

Łatwo widać, że podprzestrzeń $\mathcal{Y}$ ma wymiar 3. Na to aby $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{Y}$ potrzeba i wystarcza, by każda kolumna macierzy A była wektorem z $\mathcal{Y}$. Stąd, ustalając macierz $Y \in \mathbf{R}^{4,3}$, której kolumny stanowią dowolną bazę w $\mathcal{Y}$ dostajemy, że podprzestrzeń $\mathcal{A}$ składa się ze wszystkich macierzy A postaci

$$A = Y * B, \quad \text{gdzie } B \in \mathbf{R}^{3,4} \text{ jest dowolna.}$$

Ponieważ B ma $3 \cdot 4 = 12$ elementów, $\dim(\mathcal{A}) = 12$.

Zadanie 3.
Z układem równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \alpha \end{cases}$$

stowarzyszamy macierz rozszerzoną

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \alpha \end{array}\right).$$

Teraz obliczamy rzędy macierzy A i $[A|b]$ w zależności od parametrów α i λ. Przeprowadzając operacje elementarne na wierszach otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \alpha \end{array}\right] \begin{array}{c} \rightsquigarrow \\ w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & \alpha \end{array}\right].$$

Stąd:

(1) dla $\lambda \neq 1$ mamy $\mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}([A|b]) = 3$, a zatem układ ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\alpha}{\lambda-1} \\ x_3 = \frac{1}{2}(1 - x_2) = \frac{\lambda-1-\alpha}{2(\lambda-1)} \\ x_1 = -x_2 - x_3 = \frac{-\lambda+1-\alpha}{2(\lambda-1)} \end{cases}$$

(2) dla $\lambda = 1$ i $\alpha \neq 0$ mamy $\mathrm{rz}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{rz}([A|b])$, a zatem układ jest sprzeczny

(3) dla $\lambda = 1$ i $\alpha = 0$ mamy $\mathrm{rz}(A) = 2 = \mathrm{rz}([A|b])$, a zatem układ jest niesprzeczny i przyjmuje postać

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases},$$

czyli równoważnie

$$\begin{cases} x_2 = 1 - 2x_3 \\ x_1 = -x_2 - x_3 = -1 + x_3 \end{cases},$$

a stąd rozwiązaniem ogólnym jest $[x_1, x_2, x_3]^T = [-1, 1, 0]^T + \alpha\,[1, -2, 1]^T$, gdzie α jest dowolne.

Zadanie 4.

Załóżmy, że funkcjonały $s_1, s_2, \ldots, s_n$ są liniowo niezależne. Ponieważ $\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{X}^\star) = n$, funkcjonały te tworzą bazę $\mathcal{X}^\star$. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będzie bazą dualną $\mathcal{X}$, tzn. taką, że $s_i(x_j) = \delta_{i,j}$ (taka baza istnieje, gdyż mamy kanoniczny izomorfizm $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{**}$). Niech teraz $x = \sum_{j=1}^n a_j x_j \in \mathcal{X}$ będzie takim wektorem, że $x \in \bigcap_{j=1}^n \ker(s_j)$. Wtedy dla wszystkich j mamy $s_j(x) = a_j = 0$ i w konsekwencji $x = 0$. A zatem $\bigcap_{i=1}^n \ker(s_i) = \{0\}$.

Założmy teraz, że funkcjonały $s_1, s_2, \ldots, s_n$ są liniowo zależne. Wybierzmy maksymalny liniowo niezależny podukład. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że wybraliśmy $s_1, s_2, \ldots, s_k$, przy czym $k < n$. Uzupełnijmy układ $s_1, s_2, \ldots, s_k$ do bazy $s_1, s_2, \ldots, s_k, s'_{k+1}, \ldots, s'_n$ przestrzeni $\mathcal{X}^\star$ i niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będzie dualną do niej bazą przestrzeni $\mathcal{X}$. Zauważmy teraz, że dla $i > k$ mamy $s_1(x_i) = s_2(x_i) = \cdots = s_k(x_i) = 0$, a zatem $s_j(x_i) = 0$ dla $j > k$ (bo s_j są liniowymi kombinacjami funkcjonałów $s_1, s_2, \ldots, s_j$). Dostaliśmy więc, że

$$\mathrm{span}(x_{k+1}, \ldots, x_n) \subset \bigcap_{i=1}^n \ker(s_i).$$

Zadanie 5.

Eliminując kolejno wyrazy macierzy A pod główną diagonalą w dwóch początkowych kolumnach otrzymujemy rozkład "częściowy"

$$A = \overline{L} * \overline{R} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 2 & 0 & 1 & \\ 3 & 1 & & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Puste miejsca oznaczają zera.) Ponieważ element $(3,3)$ w macierzy $\overline{R}$ jest zerowy, należy teraz dokonać permutacji wierszy trzecego i czwartego, co odpowiada mnożeniu z lewej strony przez macierz transpozycji

$$P = T_{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie dostajemy rozkład $P*A = L*R$, gdzie

$$L = \left(T_{3,4} * \overline{L} * T_{3,4}^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 3 & 1 & 1 & \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad R = T_{3,4} * \overline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6.
Oznaczając przez B macierz, której kolumny są podanymi wektorami bazowymi,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

oraz przez $F = \mathrm{diag}(1,2,3) \in \mathbf{R}^{3,3}$ macierz przekształcenia f w tej bazie, mamy

$$f(\vec{x}) = B * F * B^{-1} * \vec{x}, \qquad \vec{x} \in \mathbf{R}^3.$$

Stąd, odwracając "po drodze" macierz B otrzymujemy

$$A = B*F*B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -2 & 3/2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 7/2 \end{bmatrix}.$$

(A jest macierzą przekształcenia w bazie kanonicznej $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.)

Zadanie 7.
Obliczając wyznacznik macierzy A dostajemy $\det(A) = -2(\lambda-1)$. Korzystając ze wzoru $\det(A^k) = (\det(A))^k$ mamy dalej $\det(A^4) = (\det(A))^4 = 16\,(\lambda-1)^4$ oraz $-3\det(A^2) = -3(\det(A))^2 = -12(\lambda-1)^2$. Wszystkie szukane wartości λ są więc rozwiązaniami równania

$$16\,(\lambda-1)^4 = -12(\lambda-1)^2.$$

Rozwiązując otrzymujemy trzy wartości,

$$\lambda \in \{\,1,\ 1 \pm \imath\sqrt{3}/2\,\}.$$

Zadanie 8.
Z wykładu wiemy, że dla dowolnej formy kwadratowej $h : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ istnieje baza, w której macierz formy ma postać diagonalną $\mathrm{diag}(I_\pi, -I_\nu, 0_\xi)$ z *jednoznacznie* wyznaczonymi π, ν, ξ spełniającymi $\pi + \nu + \xi = n$. Co więcej, macierz ta jest identycznością, tzn. $\pi = n$, wtedy i tylko wtedy gdy forma jest dodatnio określona, a to z kolei jest równoważne dodatniej określoności macierzy formy w dowolnej bazie.

W naszym przypadku mamy $h(\vec{x}) = \vec{x}^T * A * \vec{x}$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda & 3 \\ \lambda & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbf{R},$$

jest macierzą formy h w bazie kanonicznej $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. *Kryterium Sywester'a* mówi, że macierz jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie wyznaczniki macierzy kątowych $A_k = (a_{i,j})_{i,j=1}^k$, $k = 1,2,3$, są dodatnie. Sprawdzamy, że $\det(A_1) = 2$, $\det(A_2) = 4 - \lambda^2$, oraz

$$\det(A_3) = \det(A) = -\lambda^2 + 6\,\lambda - 16.$$

Ponieważ ostatni trójmian kwadratowy przyjmuje stale wartości ujemne ($\Delta = -28 < 0$), szukane wartości λ nie istnieją.