**GAL (I INF)**
**EGZAMIN** (I termin)
3 lutego 2011

UWAGI.
*(i) Poszczególne zadania należy oddawać na osobnych kartkach podpisanych imieniem i nazwiskiem.*
*(ii) Każde zadanie warte jest 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.*

**Zadanie 1.** W $\mathbf{R}^{3,3}$ dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

oraz $X \in \mathbf{R}^{3,3}$ spełniająca $\mathcal{R}(A * X) = \mathcal{R}(B)$. Ile wynosi rząd $X$? Podaj przykład takiej macierzy $X$ i rozstrzygnij czy jest ona wyznaczona jednoznacznie.

**Zadanie 2.** W przestrzeni $\mathbf{R}^4$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$\mathcal{Y} = \{\, \vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbf{R}^4 \;:\; x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \,\}.$$

Pokaż, że zbiór

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathbf{R}^{4,4} : \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{Y}\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbf{R}^{4,4}$. Ile wynosi wymiar $\dim(\mathcal{A})$?

**Zadanie 3.** Niech $\mathcal{X}$ będzie przestrzenią liniową o wymiarze $\dim(\mathcal{X}) = n$. Wykaż, że dane funkcjonały liniowe $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathcal{X}^*$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy iloczyn

$$\bigcap_{j=1}^{n} \ker(s_j) = \{\mathbf{0}\} \qquad \text{(przestrzeń zerowa)}$$

**Zadanie 4.** Znajdź ogólne rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \alpha \end{cases}$$

w zależności od wartości parametrów $\alpha, \lambda \in \mathbf{R}$.

**Zadanie 5.** Niech macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 11 & 13 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{4,4}.$$

Wykorzystując eliminację Gaussa znajdź rozkład macierzy $A$ na iloczyn

$$P * A = L * R,$$

gdzie $P \in \mathbf{R}^{4,4}$ jest macierzą permutacji, $L \in \mathbf{R}^{4,4}$ macierzą trójkątną dolną z jedynkami na głównej przekątnej, a $R \in \mathbf{R}^{4,4}$ macierzą trójkątną górną.

Na podstawie otrzymanego rozkładu podaj wyznacznik $\det(A)$.

**Zadanie 6.** Niech $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym, którego macierz w bazie

$$\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

wynosi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz macierz $A \in \mathbf{R}^{3,3}$ taką, że $f(\vec{x}) = A * \vec{x}$ dla wszystkich $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$.

**Zadanie 7.** Niech macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz wszystkie wartości zespolone $\lambda$ dla których

$$\det\left(A^4\right) = -3 \cdot \det\left(A^2\right).$$

**Zadanie 8.** Niech $h : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ będzie formą kwadratową daną wzorem

$$h([x_1, x_2, x_3]^T) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda\, x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3, \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Czy istnieją wartości $\lambda$ dla których macierz tej formy w pewnej bazie jest macierzą identycznościową $I_3$?