GAL (I INF)

EGZAMIN (II termin)

1 marca 2010

UWAGI.
(i) Poszczególne zadania należy oddawać na osobnych kartkach podpisanych imieniem i nazwiskiem.
(ii) Każde zadanie warte jest 5 *punktów, niezależnie od stopnia trudności.*

Zadanie 1. Niech $\vec{a} = [1, 0, 0]^T$ i $\vec{b} = [0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$ będą wektorami w przestrzeni liniowej $\mathbf{C}^3_{|\mathbf{C}}$, a $\|\cdot\|_2$ normą drugą Schura w tej przestrzeni. Wykaż, że równanie

$$\| z\,\vec{a} + (1-z)\,\vec{b}\,\|_2 \;=\; 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań $z \in \mathbf{C}$.

Zadanie 2. W przestrzeni liniowej $\mathcal{X} = \mathbf{R}^5$ dane są dwie podprzestrzenie:

$$\mathcal{Y} \;=\; \operatorname{span}\left([1,1,1,1,1]^T, [1,2,4,8,16]^T, [1,a,a^2,a^3,a^4]^T\right),$$

$$\mathcal{Z} \;=\; \operatorname{span}\left([a,a^2,a^3,a^4,a^5]^T, [b,b^2,b^3,b^4,b^5]^T, [c,c^2,c^3,c^4,c^5]^T\right),$$

gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Wyznacz wszystkie układy parametrów a, b, c, dla których

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}.$$

Zadanie 3. Na przestrzeni $\mathcal{X} = \mathcal{P}^2_{|\mathbf{R}}$ wielomianów stopnia co najwyżej 1 zdefiniowano funkcjonał liniowy $s = s_1 + s_2$, gdzie s_1, s_2 jest bazą w $\mathcal{X}^*$ sprzężoną z bazą wielomianów

$$p_1(t) = 1 - t, \qquad p_2(t) = t.$$

Znajdź współczynniki rozwinięcia funkcjonału s w bazie sprzężonej z bazą

$$q_1(t) = 1, \qquad q_2(t) = t.$$

Zadanie 4. Dana jest macierz $A \in \mathbf{K}^{m,n}$ i baza $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m$ przestrzeni $\mathbf{K}^m$. Wiadomo, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, m$ układ równań $A * \vec{x} = \vec{b}_i$ ma jednoznaczne rozwiązanie $\vec{x}_i \in \mathbf{K}^n$. Pokaż, że $m = n$ i macierz A jest nieosobliwa.

Zadanie 5. Załóżmy, że przekształcenie liniowe $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ spełnia $f \circ f = f$. Niech $\mathrm{id} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ będzie przekształceniem identycznościowym, tzn. $\mathrm{id}(x) = x \;\forall x \in \mathcal{X}$. Wykaż, że:
(a) $(\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} - f) = \mathrm{id} - f$,
(b) $\ker(f) = \mathrm{im}(\mathrm{id} - f)$.

Zadanie 6. Dla $\lambda \in \mathbf{C}$ macierz A_λ zdefiniowana jest jako

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Dla jakich wartości λ macierz A_λ jest nieosobliwa?

Zadanie 7. Dla jakich wartości $a \in \mathbf{R}$ forma kwadratowa

$$h\left([x_1, x_2, x_3]^T\right) = x_1^2 + ax_2^2 + (a+1)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$$

jest dodatnio określona?

Zadanie 8. W przestrzeni Euklidesowej $\mathcal{X} = \mathbf{R}^3$ z iloczynem skalarnym

$$(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3,$$

znajdź rzut prostopadły wektora $[1, 2, 3]^T \in \mathbf{R}^3$ na podprzestrzeń

$$\mathcal{Y} = \operatorname{span}\left([1, 1, 1]^T, [0, 2, 2]^T\right).$$