GAL (I INF)

EGZAMIN (I termin)

4 lutego 2010

UWAGI.

(i) Poszczególne zadania należy oddawać na osobnych kartkach podpisanych imieniem i nazwiskiem.

(ii) Każde zadanie warte jest 5 punktów, niezależnie od stopnia trudności.

Zadanie 1. Niech $\|\cdot\| : \mathbf{R}^4 \to [0,+\infty)$ będzie normą w przestrzeni wektorowej $\mathbf{R}^4$. Niech przekształcenie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ dane będzie wzorem

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Czy odwzorowanie $\psi : \mathbf{R}^3 \to [0,+\infty)$ zdefiniowane jako

$$\psi(\vec{x}) = \|f(\vec{x})\|$$

jest normą w przestrzeni $\mathbf{R}^3$?

Zadanie 2. Niech $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ będą podprzestrzeniami przestrzeni zespolonej $\mathbf{C}^5_{|\mathbf{C}}$ zdefiniowanymi jako

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \left\{ [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5]^T \in \mathbf{C}^5 : \quad z_1 + (a+1)z_2 - z_3 + a^3 z_4 - z_5 = 0 \right\}, \\ \mathcal{Y} &= \operatorname{span}\left([2, 1, 1, a^2, 2]^T\right), \end{aligned}$$

gdzie $a \in \mathbf{C}$. Dla jakich wartości parametru a mamy

$$\mathbf{C}^5 = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} \quad ?$$

Zadanie 3. W przestrzeni $\mathcal{X} = \mathbf{R}^5$ dana jest podprzestrzeń $\mathcal{Y}$ o wymiarze 2. Niech S będzie zbiorem funkcjonałów s, których jądro zawiera $\mathcal{Y}$, czyli

$$\mathcal{S} = \{ s \in \mathcal{X}^* : \ s(\mathcal{Y}) = \{0\} \}.$$

Pokaż, że S jest podprzestrzenią liniową w $\mathcal{X}^*$, a następnie znajdź jej wymiar.

Zadanie 4. Stosując algorytm eliminacji Gaussa znajdź ogólne rozwiązanie układu równań

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & & & + & 2x_5 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & -2 \end{array} \right.$$

Wyznacz odpowiadający przeprowadzonym operacjom rozkład trójkątno-trójkątny

$$P * A * Q^T = L * R$$

macierzy A tego układu równań.

Zadanie 5. Niech $\mathcal{X}$ będzie przestrzenią liniową, $\dim(\mathcal{X}) < +\infty$, a $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ przekształceniem liniowym takim, że złożenie $f \circ f = f$. Wykaż, że $\mathcal{X}$ jest sumą prostą podprzestrzeni $\ker(f)$ i $\mathrm{im}(f)$, tzn.

$$\mathcal{X} = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f).$$

Zadanie 6. Niech macierz

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & a-3 & a-4 \\ a+1 & a-1 & a-3 \\ a-4 & a-7 & a-10 \end{bmatrix}$$

gdzie $a \in \mathbf{R}$. Oblicz wyznacznik $\det(A)$.

Zadanie 7. Forma dwuliniowa $\varphi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ ma w bazie kanonicznej macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Wykaż, że istnieje baza w $\mathbf{R}^3$, w której macierz formy φ jest macierzą identycznościową I_3. Znajdź taką bazę.

Zadanie 8. Niech $\mathcal{X} = \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ będzie przestrzenią Euklidesową z iloczynem skalarnym

$$(p,q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \qquad p,q \in \mathcal{X}.$$

Znajdź w warstwie

$$\mathcal{W} = \{p \in \mathcal{X} :\ p(0) = 1\}$$

wielomian, który jest najbliższy wielomianowi $p(t) = t^2$ w sensie normy wyznaczonej przez iloczyn skalarny w $\mathcal{X}$.