GAL (I INF)

Egzamin (I termin)
4-02-2010

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1.
Należy sprawdzić czy funkcja ψ spełnia aksjomaty normy, tzn.
(i) $\quad \psi(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0} \qquad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3$
(ii) $\quad \psi(\alpha\vec{x}) = |\alpha|\psi(\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \ \forall \alpha \in \mathbf{R}$
(iii) $\quad \psi(\vec{x} + \vec{y}) \le \psi(\vec{x}) + \psi(\vec{y}) \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^3$.

Warunek (i) jest spełniony, bo $\psi(\vec{0}) = \|f(\vec{0})\| = \|\vec{0}\| = 0$; jeśli zaś $\psi(x) = \|f(\vec{x})\| = 0$ to $f(\vec{x}) = 0$, a ponieważ jądro f jest podprzestrzenią zerową to $\vec{x} = \vec{0}$.

Bezpośredni rachunek pokazuje, że (ii) i (iii) są także spełnione, bowiem

$$\psi(\alpha\vec{x}) = \|f(\alpha\vec{x})\| = |\alpha f(\vec{x})\| = |\alpha|\|f(\vec{x}\| = |\alpha|\psi(\vec{x}).$$

oraz

$$\psi(\vec{x} + \vec{y}) = \|f(\vec{x} + \vec{y})\| = \|f(\vec{x}) + f(\vec{y})\| \le \|f(\vec{x})\| + \|f(\vec{y})\| = \psi(x) + \psi(y).$$

Przekształcenie ψ jest więc normą w $\mathbf{R}^3$.

Zadanie 2.
Dla dowolnej liczby zespolonej α mamy $\dim(\mathcal{X}) = 3$ i $\dim(\mathcal{Y}) = 1$. Stąd przestrzenie $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ tworzą sumę prostą wtedy i tylko wtedy gdy wektor $[2, 1, 1, \alpha^2, 2]^T$ rozpinający $\mathcal{Y}$ nie należy do $\mathcal{X}$. Równoważnie, wektor ten nie spełnia równania opisującego przestrzeń X, tzn.

$$2 + (\alpha + 1) \cdot 1 - 1 + \alpha^3 \cdot a^2 - 2 \neq 0.$$

Po przekształceniach dostajemy, że $\alpha \cdot (\alpha^4 + 1) \neq 0$, czyli $\alpha \neq 0$ oraz

$$\alpha^4 \neq -1.$$

Korzystając ze wzorów na pierwiastki z liczby zespolonej dostajemy ostateczną odpowiedź ($\imath = \sqrt{-1}$)

$$\alpha \notin \left\{0, \quad \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + \imath), \quad \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - \imath), \quad -\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + \imath), \quad -\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - \imath)\right\}.$$

Zadanie 3.
Zbiór funkcjonałów S jest podprzestrzenią w $\mathcal{X}^*$, bo dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, $s_1, s_2 \in \mathcal{X}^*$, oraz $\vec{y} \in \mathcal{Y}$ mamy

$$(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2)(\vec{y}) = \alpha_1 s_1(\vec{y}) + \alpha_2 s_2(\vec{y}) = \alpha_1 * 0 + \alpha_2 * 0 = 0.$$

Aby znaleźć wymiar S, weźmy bazę $(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ w $\mathcal{Y}$ i uzupełnijmy ją do bazy $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4, \vec{y}_5)$ przestrzeni $\mathcal{X} = \mathbf{R}^5$. Niech dalej $(s_1^*, s_2^*, s_3^*, s_4^*, s_5^*)$ będzie bazą do niej sprzężoną w $\mathcal{X}$. Wtedy dla dowolnego funkcjonału

(1) $$s = \sum_{j=1}^{5} \alpha_j s_j^* \in \mathcal{X}^*$$

oraz dowolnego wektora bazowego $\vec{y}_i$ $(1 \leq i \leq 5)$ mamy

$$s(\vec{y}_i) = \left(\sum_{j=1}^{5} \alpha_j s_j^* \right) (y_i) = \alpha_i.$$

Stąd $s \in S$ wtedy i tylko wtedy gdy $s(\vec{y}_1) = s(\vec{y}_2) = 0$, czyli $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, co z kolei jest równoważne temu, że $s \in \mathrm{span}(s_3^*, s_4^*, s_5^*)$. W konsekwencji $\dim(S) = 3$.

Zadanie 4.
Zapisujemy układ w postaci $A\vec{x} = \vec{b}$, gdzie

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Pierwszą kolumnę eliminujemy za pomocą operacji $w_2 \mapsto w_2 - (-2) \cdot w_1$, $w_3 \mapsto w_3 - 3 \cdot w_1$, $w_4 \mapsto w_2 - 1 \cdot w_1$. Dostajemy wektor eliminacji pierwszej kolumny $\vec{l_1} = [0, -2, 3, 1]^T$. Mamy teraz

$$[A^{(1)}|\vec{b}^{(1)}] = \left[\begin{array}{lrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right].$$

Teraz przestawiamy kolumny 2. i 3., a następnie eliminujemy 2. Wektor eliminacji to $\vec{l_2} = [0, 0, -4, -1]^T$. Dostajemy

$$[A^{(2)}|\vec{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{llrrl|r} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right].$$

Przestawiamy kolumny 3. i 5. eliminujemy 3. $\vec{l_3} = [0, 0, 0, 1]^T$.

$$[A^{(3)}|\vec{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{lllrr|r} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right].$$

Widzimy, że $\mathrm{rank} A^{(3)} = 3$, $\mathrm{rank}[A^{(3)}|\vec{b}^{(3)}] = 4$. Z tw. Croneckera-Capelliego wynika, że układ jest sprzeczny.

Rozkład trójkątno-trójkątny macierzy A jest następujący: $R = A^{(3)}$,

$$L = I_4 + [\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}, 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$P = I_4$ (wiersze nie były przestawiane), natomiast Q to macierz wykonanej permutacji kolumn:

$$Q = T_{3,5} * T_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5.
Najpierw pokażemy, że suma $\mathrm{im}(f)+\ker(f)$ jest prosta. Rzeczywiście, niech $y \in \mathrm{im}(f)\cap\ker(f)$. Wtedy z jednej strony $f(y)=\mathbf{0}$, a z drugiej $y=f(x)$ dla pewnego $x\in\mathcal{X}$. Wobec tego, że $f\circ f=f$, mamy

$$f(y)=f(f(x))=f(x)=y,$$

a stąd $y=\mathbf{0}$ i suma jest prosta.

Pozostaje wykazać, że

$$\mathcal{X}=\mathrm{im}(f)\oplus\ker(f). \tag{2}$$

Oczywiście

$$(\mathrm{im}(f)\oplus\ker(f))\subseteq\mathcal{X}. \tag{3}$$

Ponadto, na podstawie twierdzeń z wykładu i faktu, że suma jest prosta, otrzymujemy

$$\dim(\mathcal{X})=\dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{im}(f))=\dim(\mathrm{im}(f)\oplus\ker(f)). \tag{4}$$

Równość (2) wynika teraz z (3) i (4).

Zadanie 6.
Niech

$$A=\begin{bmatrix} a-2 & a-3 & a-4 \\ a+1 & a-1 & a-3 \\ a-4 & a-7 & a-10 \end{bmatrix}.$$

Odejmując pierwszą kolumnę od drugiej, a następnie pierwszą od trzeciej otrzymujemy macierz

$$A'=\begin{bmatrix} a-2 & -1 & -2 \\ a+1 & -2 & -4 \\ a-4 & -3 & -6 \end{bmatrix},$$

której wyznacznik jest taki sam jak wyznacznik macierzy A. Ponieważ kolumny druga i trzecia macierzy A' są proporcjonalne to $\det(A')=0$, a tym samym $\det(A)=0$.

Zadanie 7.
Niech

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą formy φ w bazie kanonicznej. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że wyznaczniki kolejnych macierzy kątowych A_1, A_2, A_3 macierzy A wynoszą odpowiednio 2, 4, 4. Stąd, na podstawie kryterium Sylwestera, macierz A jest dodatnio określona i podobna do macierzy identycznościowej I_3. Równoważnie, istnieje macierz nieosobliwa $C\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ taka, że

$$C^T * A * C = I_3, \tag{5}$$

przy czym kolumny macierzy C tworzą szukaną bazę w $\mathbf{R}^3$.

Aby znaleźć C, przekształcimy macierz A przez kongruencje do macierzy jednostkowej. Najpierw odejmujemy od wierszy drugiego i trzeciego wiersz pierwszy, a następnie dodajemy wiersz drugi do trzeciego otrzymując, w zapisie macierzowym, $B_1=L_2*L_1*A$, gdzie

$$B_1=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad L_2=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad L_1=\begin{bmatrix} 1 & & \\ -1 & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Z kolei wykonując te same operacje na kolumnach macierzy B_1 otrzymujemy

$$B_2 = B_1 * L_1^T * L_2^T = (L_2 * L_1) * A * (L_2 * L_1)^T = \mathrm{diag}(2, 2, 1).$$

Teraz wystarczy pomnożyć B_2 z lewej i z prawej strony przez macierz diagonalną

$$D = \mathrm{diag}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

aby otrzymać (5) z macierzą

$$C = L_1^T * L_2^T * D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -2 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uwaga. Szukaną bazę (która nie jest wyznaczona jednoznacznie) można również uzyskać stosując do dowolnego układu bazowego w $\mathbf{R}^3$ ortonormalizację Grama-Schmidta ze względu na iloczyn skalarny φ.

Zadanie 8.

Warunek $p(0) = 1$ implikuje, że warstwa

$$\mathcal{W} \;=\; \{\; q(t) = at^2 + bt + 1 : \; a, b \in \mathbf{R} \;\} \;=\; 1 + \mathrm{span}(t, t^2).$$

Ponieważ $\|p(t) - q(t)\| \;=\; \|(p(t) - 1) - (q(t) - 1)\|$, minimalizacja odległości wielomianu $p(t)$ od wielomianów z $\mathcal{W}$ sprowadza się do minimalizacji odległości wielomianu $p'(t) = p(t) - 1 = t^2 - 1$ od wielomianów z podprzestrzeni

$$\mathcal{Y} = \mathrm{span}(t, t^2).$$

Wiemy, że rozwiązaniem ostatniego zadania jest rzut prostopadły $p'(t)$ na $\mathcal{Y}$. Sprawdzamy, że ze względu na dany iloczyn skalarny mamy

$$(t^2 - 1, t) = 0, \qquad \text{oraz} \qquad (t^2 - 1, t^2) = 0,$$

co oznacza, że $t^2 - 1$ jest prostopodły do $\mathcal{Y}$ i w konsekwencji poszukiwanym rzutem jest wielomian zerowy.

Ostatecznie wielomianem najbliższym t^2 w warstwie $\mathcal{W}$ jest wielomian stały równy 1.