

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Grupy i ciała, liczby zespolone</b>	<b>3</b>
1.1	Podstawowe struktury algebraiczne . . . . .	3
1.1.1	Grupa . . . . .	3
1.1.2	Ciało . . . . .	5
1.2	Ciało liczb zespolonych . . . . .	6
1.2.1	Definicja . . . . .	6
1.2.2	Postać trygonometryczna . . . . .	7
1.2.3	Wzór de Moivre'a . . . . .	8
1.2.4	Pierwiastki z jedynki . . . . .	9
1.2.5	Sprzężenie . . . . .	9
1.3	Wielomiany . . . . .	10
1.3.1	Algorytm Hornera . . . . .	10
1.3.2	Zasadnicze twierdzenie algebry . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Macierze liczbowe</b>	<b>13</b>
2.1	Podstawowe definicje . . . . .	13
2.1.1	Macierze szczególnych formatów . . . . .	13
2.1.2	Podział blokowy . . . . .	14
2.2	Działania na macierzach . . . . .	14
2.2.1	Podstawowe działania . . . . .	14
2.2.2	Mnożenie macierzy . . . . .	15
2.2.3	Mnożenie macierzy w postaci blokowej . . . . .	17
2.3	Dalsze oznaczenia . . . . .	18
2.3.1	Macierze trójkątne i jednostkowe . . . . .	18
2.3.2	Układ równań jako równanie macierzowe . . . . .	19
2.4	Macierze nieosobliwe . . . . .	19
2.4.1	Grupa macierzy nieosobliwych . . . . .	19
2.4.2	Warunek nieosobliwości macierzy . . . . .	21

2.4.3	Permutacje . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Normy wektorów i macierzy</b>	<b>25</b>
3.1	Ogólna definicja normy . . . . .	25
3.2	Normy wektorów . . . . .	26
3.2.1	Normy $p$ -te . . . . .	26
3.2.2	Pożyteczne (nie)równości . . . . .	27
3.3	Normy macierzy . . . . .	28
3.3.1	Normy $p$ -te . . . . .	28
3.3.2	Pożyteczne (nie)równości . . . . .	29
3.3.3	Norma Frobeniusa . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Przestrzenie liniowe</b>	<b>35</b>
4.1	Przestrzenie i podprzestrzenie . . . . .	35
4.1.1	Definicja i podstawowe własności . . . . .	35
4.1.2	Podprzestrzenie liniowe . . . . .	36
4.2	Baza i wymiar przestrzeni . . . . .	37
4.2.1	Liniowa (nie)zależność . . . . .	37
4.2.2	Baza i wymiar, twierdzenie Steinitza . . . . .	39
4.2.3	Przykłady . . . . .	40
4.3	Sumy i sumy proste . . . . .	41
4.3.1	Suma (prosta) dwóch podprzestrzeni . . . . .	41
4.3.2	Suma (prosta) w ogólnym przypadku . . . . .	43
4.4	Izomorfizm przestrzeni . . . . .	44
4.5	Warstwy modulo $\mathcal{Y}$ . . . . .	45
4.5.1	Definicja . . . . .	45
4.5.2	Przestrzeń warstw . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Obraz, rząd i jądro macierzy</b>	<b>49</b>
5.1	Obraz i rząd macierzy . . . . .	49
5.1.1	Rząd kolumnowy i rząd wierszowy . . . . .	49
5.1.2	Rząd macierzy . . . . .	50
5.2	Przestrzeń zerowa (jądro) macierzy . . . . .	51
5.3	Rozkład względem obrazu i jądra . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Funkcjonały liniowe</b>	<b>55</b>
6.1	Funkcjonały . . . . .	55
6.1.1	Definicja i przykłady . . . . .	55

6.1.2	Przestrzeń sprzężona . . . . .	56
6.2	Refleksywność . . . . .	57
6.2.1	Równość $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}^{**}$ . . . . .	57
6.2.2	Przykłady . . . . .	58
6.3	Rozszerzenie rachunku macierzy . . . . .	59
6.3.1	Macierze wektorów i funkcjonałów . . . . .	59
6.3.2	Postać macierzowa izomorfizmów . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Układy równań liniowych</b>	<b>63</b>
7.1	Zbiór rozwiązań . . . . .	63
7.1.1	Twierdzenie Croneckera-Capelliego . . . . .	63
7.1.2	Zbiór rozwiązań jako warstwa . . . . .	64
7.1.3	Układy nieosobliwe . . . . .	65
7.2	Efektywna metoda rozwiązania . . . . .	65
7.2.1	Ogólny schemat . . . . .	66
7.2.2	Eliminacja Gaussa . . . . .	66
7.2.3	Konstrukcja rozwiązania ogólnego . . . . .	67
7.3	Interpretacja macierzowa eliminacji . . . . .	69
7.3.1	Analiza operacji elementarnych . . . . .	69
7.3.2	Rozkład trójkątno-trójkątny macierzy . . . . .	71
7.4	Eliminacja bez przestawień . . . . .	72
<b>8</b>	<b>Przekształcenia liniowe</b>	<b>75</b>
8.1	Podstawowe pojęcia i własności . . . . .	75
8.1.1	Obraz, jądro i rząd przekształcenia . . . . .	75
8.1.2	Przykłady . . . . .	77
8.1.3	Różnowartościowość . . . . .	77
8.1.4	Przestrzeń przekształceń liniowych . . . . .	78
8.2	Macierz przekształcenia liniowego . . . . .	78
8.2.1	Definicja . . . . .	78
8.2.2	Izomorfizm $\mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i $\mathbf{K}^{m,n}$ . . . . .	79
8.3	Dalsze własności macierzy przekształceń . . . . .	80
8.3.1	Obraz i jądro przekształcenia/macierzy . . . . .	80
8.3.2	Zmiana bazy . . . . .	80
8.3.3	Złożenie przekształceń . . . . .	81

<b>9</b>	<b>Wyznacznik macierzy</b>	<b>83</b>
9.1	Definicja i pierwsze własności . . . . .	83
9.2	Wyznacznik a operacje elementarne . . . . .	84
9.2.1	Permutacja kolumn . . . . .	84
9.2.2	Kombinacja liniowa kolumn . . . . .	86
9.3	Dalsze własności wyznaczników . . . . .	87
9.3.1	Wyznacznik iloczynu macierzy . . . . .	87
9.3.2	Wyznacznik macierzy nieosobliwej i transponowanej . . . . .	88
9.4	Definicja kombinatoryczna wyznacznika . . . . .	89
9.5	Wzory Cramera . . . . .	90
<b>10</b>	<b>Formy dwuliniowe i kwadratowe</b>	<b>93</b>
10.1	Formy dwuliniowe . . . . .	93
10.1.1	Definicja i przykłady . . . . .	93
10.1.2	Macierz formy dwuliniowej . . . . .	94
10.2	Twierdzenie Sylwester'a . . . . .	96
10.3	Formy kwadratowe . . . . .	97
10.3.1	Określoność formy kwadratowej . . . . .	97
10.3.2	Kryterium Sylwester'a . . . . .	98
<b>11</b>	<b>Przestrzenie Euklidesowe</b>	<b>101</b>
11.1	Definicja, iloczyn skalarny i norma . . . . .	101
11.2	Rzut prostopadły . . . . .	102
11.2.1	Zadanie aproksymacji . . . . .	102
11.2.2	Twierdzenie o rzucie prostopadłym . . . . .	103
11.3	Układy ortogonalne . . . . .	104
11.3.1	Macierz Grama . . . . .	104
11.3.2	Ortogonalizacja Grama-Schmidta . . . . .	105
11.3.3	Rozkład ortogonalno-trójkątny macierzy . . . . .	107