Rozdział 9

Wyznacznik macierzy

9.1 Definicja i pierwsze własności

Niech A będzie macierzą kwadratową nad ciałem $\mathbf{K}$,

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbf{K}^{n,n}.$$

Definicja 9.1 (PRZEZ ROZWINIĘCIE LAPLACE'A)
Wynacznikiem *macierzy kwadratowej* $n \times n$ *nazywamy funkcję*

$$\det_n : \mathbf{K}^{n,n} \to \mathbf{K},$$

zdefiniowaną rekurencyjnie w następujący sposób:

$$(n = 1) \quad \det_1(A) := \det_1([a_{1,1}]) = a_{1,1},$$

$$(n \geq 2) \quad \det_n(A) := \textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n} a_{i,n} \cdot \det_{n-1}(A_{i,n}),$$

gdzie $A_{i,n} \in \mathbf{K}^{n-1.n-1}$ *jest macierzą powstałą z* A *poprzez usunięcie z niej* i*-tego wiersza i* n*-tej kolumny.*

Zgodnie z definicją mamy

$$\begin{aligned}
\det_2(A) &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}, \\
\det_3(A) &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\
&\quad - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}, \\
\det_4(A) &= \ldots.
\end{aligned}$$

Wprost z definicji rekurencyjnej łatwo również zauważyć, że dla macierzy identycznościowej mamy $\det_n(I_n) = 1$. Ogólniej, jeśli A jest macierzą rójkątną dolną lub trójkątną górną, $A \in \mathrm{TRIL}^{n,n} \cup \mathrm{TRIU}^{n,n}$, to

$$\det_n(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Jeśli format macierzy jest znany lub nieistotny to dalej będziemy dla uproszczenia pisać $\det(A)$ zamiast $\det_n(A)$.

Twierdzenie 9.1 *Wyznacznik jest funkcją liniową ze względu na dowolną kolumnę macierzy, tzn.*

$$\begin{aligned} &\det([\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p * \alpha + \vec{a}'_p * \alpha', \ldots, \vec{a}_n]) \\ &\quad = \det([\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p, \ldots, \vec{a}_n]) * \alpha + \det([\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}'_p, \ldots, \vec{a}_n]) * \alpha', \end{aligned}$$

$1 \le p \le n$.

Dowód. Rzeczywiście, równość w oczywisty sposób zachodzi dla $n = 1$, a dla $n \ge 2$ wystarczy osobno rozpatrzyć dwa przypadki, $p = n$ i $1 \le p \le n-1$, oraz skorzystać z definicji rekurencyjnej.

Z twierdzenia 9.1 mamy od razu, że $\det([\ldots, \vec{0}, \ldots]) = 0$. Natomiast stosując twierdzenie 9.1 kolejno do każdej z kolumn macierzy otrzymujemy, że dla dowolnej macierzy diagonalnej $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$$\det(A * D) = \det([\vec{a}_1 * \alpha_1, \ldots, \vec{a}_n * \alpha_n]) = \det(A) \cdot \prod_{i=1}^{n} \alpha_i. \tag{9.1}$$

W szczególności,

$$\det_n(\alpha * A) = \alpha^n \cdot \det_n(A) \qquad \text{oraz} \qquad \det_n(-A) = (-1)^n \cdot \det_n(A).$$

9.2 Wyznacznik a operacje elementarne

9.2.1 Permutacja kolumn

Twierdzenie 9.2 *Przestawienie różnych kolumn macierzy zmienia znak wyznacznika, tzn. dla dowolnej transpozycji $T_{p,q}$, $p \neq q$,*

$$\det(A * T_{p,q}) = -\det(A).$$

Dowód. (Indukcja względem n.)
Dla $n = 1, 2$ wzór sprawdzamy bezpośrednio z definicji. Dla $n \geq 3$ rozpatrujemy trzy przypadki.
(a) $1 \leq p < q \leq n - 1$.
Korzystając z założenia indukcyjnego mamy

$$\begin{aligned}
\det_n(A * T_{p,q}) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{i,n} \det_{n-1}((A * T_{p,q})_{i,n}) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{i,n} \det_{n-1}(A_{i,n}) \\
&= -\det_n(A).
\end{aligned}$$

(b) $p = n - 1$, $q = n$.
Stosując dwukrotnie rozwinięcie Laplace'a dostajemy

$$\begin{aligned}
\det_n(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{i,n} \det_{n-1}(A_{i,n}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{i,n} \Big(\sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{k+(n-1)} a_{k,n-1} \det_{n-2}(A_{\{i,k\}\{n-1,n\}}) \\
&\quad + \sum_{k=i+1}^{n} (-1)^{(k-1)+(n-1)} a_{k,n-1} \det_{n-2}(A_{\{i,k\}\{n-1,n\}}) \Big) \\
&= -\sum_{k<i} (-1)^{i+k} a_{i,n} a_{k,n-1} \det_{n-2}(A_{\{i,k\}\{n-1,n\}}) \\
&\quad + \sum_{i<k} (-1)^{i+k} a_{i,n} a_{k,n-1} \det_{n-2}(A_{\{i,k\}\{n-1,n\}}),
\end{aligned}$$

gdzie $A_{\{i,k\}\{n-1,n\}}$ jest macierzą powstałą z A poprzez usunięcie wierszy i-tego i k-tego oraz kolumn $(n-1)$-szej i n-tej. Wykonując to samo dla macierzy $A * T_{p,q}$ otrzymujemy ten sam wzór, ale z odwróconymi znakami przed symbolami sumowania.
(c) $1 \leq p \leq n - 2$, $q = n$.
W tym przypadku wystarczy zauważyć, że

$$A * T_{p,n} = A * T_{p,n-1} * T_{n-1,n} * T_{p,n-1}$$

i skorzystać dwukrotnie z (a) i raz z (b).

Z twierdzenia 9.2 wynika w szczególności, że wyznacznik macierzy transpozycji $T_{p,q}$ z $p \neq q$ wynosi -1.

Wyznacznik można rozwijać nie tylko względem ostatniej, ale również względem dowolnej kolumny.

Twierdzenie 9.3 *Dla dowolnego $n \geq 2$ i $1 \leq j \leq n$ mamy*

$$\det_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det_{n-1}(A_{i,j}).$$

Dowód. Jeśli $j = n-1$ to

$$\begin{aligned}
\det_n(A) &= -\det_n(A * T_{n-1,n}) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{i,n-1} \cdot \det_{n-1}(A_{i,n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n-1} a_{i,n-1} \cdot \det_{n-1}(A_{i,n-1}).
\end{aligned}$$

Dalej, korzystając z prawdziwości rozwinięcia dla $j = n-1$, pokazujemy podobnie prawdziwość rozwinięcia dla $j = n-2$, itd., aż do $j = 1$.

9.2.2 Kombinacja liniowa kolumn

Z twierdzenia 9.2 od razu otrzymujemy

$$\det([\ldots, \vec{a}, \ldots, \vec{a}, \ldots]) = 0.$$

Stąd i z liniowości wyznacznika względem dowolnej kolumny wynika, że wyznacznik nie ulegnie zmianie gdy do kolumny dodamy inną kolumnę pomnożoną przez skalar, tzn.

$$\begin{aligned}
&\det([\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{p-1}, \vec{a}_p + \vec{a}_q * m, \vec{a}_{p+1}, \ldots, \vec{a}_n]) \\
&\quad = \det([\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{p-1}, \vec{a}_p, \vec{a}_{p+1}, \ldots, \vec{a}_n]).
\end{aligned}$$

Uogólnieniem ostatniej własności jest następująca.

Twierdzenie 9.4 *Jeśli do p-tej kolumny dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn to wyznacznik macierzy nie ulegnie zmianie, tzn.*

$$\begin{aligned}
&\det\Big(\Big[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{p-1}, \vec{a}_p + \sum_{j \neq p} \vec{a}_j * m_j, \vec{a}_{p+1}, \ldots, \vec{a}_n\Big]\Big) \\
&\quad = \det([\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{p-1}, \vec{a}_p, \vec{a}_{p+1}, \ldots, \vec{a}_n]).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że ostatnią równość można symbolicznie zapisać jako

$$\det(A * (I + \vec{m} * \vec{e}_p^T)) = \det(A), \quad \text{o ile } \vec{e}_p^T * \vec{m} = 0.$$

Wniosek 9.1 *Jeśli macierz A jest osobliwa to* $\det(A) = 0$.

Dowód. Jeśli A nie jest pełnego rzędu to jedna z kolumn, powiedzmy p, jest kombinacją liniową pozostałych kolumn. Odejmując od p-tej kolumny tą kombinację liniową otrzymujemy macierz A' o tym samym wyznaczniku co A i o zerowej p-tej kolumnie. Stąd $\det(A) = \det(A') = 0$.

9.3 Dalsze własności wyznaczników

9.3.1 Wyznacznik iloczynu macierzy

Jak wiemy, każdą macierz trójkątną dolną $L \in \mathrm{TRIL}^{n,n}$ z jedynkami na głównej przekątnej można przedstawić jako iloczyn

$$L = I_n + \vec{l}_1 * \vec{e}_1^T + \cdots + \vec{l}_{n-1} * \vec{e}_{n-1}^T = (I_n + \vec{l}_1 * \vec{e}_1^T) * \cdots * (I_n + \vec{l}_{n-1}\vec{e}_{n-1}^T),$$

gdzie $\vec{l}_j = [\underbrace{0, \ldots, 0}_{j}, l_{j+1,j}, \ldots, l_{n,j}]^T$, $1 \le j \le n-1$. Na podstawie twierdzenia 9.4 mamy więc, że

$$\det(A * L) = \det(A). \tag{9.2}$$

Podobnie, wyznacznik nie ulegnie zmianie gdy macierz pomnożymy z prawej strony przez macierz trójkątną górną z jedynkami na głównej przekątnej.

Niech teraz $W \in \mathrm{TRIL}^{n,n} \cup \mathrm{TRIU}^{n,n}$. Jeśli wszystkie wyrazy na przekątnej są niezerowe, $w_{i,i} \neq 0$, $1 \le i \le n$, to

$$W = W_1 * \mathrm{diag}(w_{1,1}, \ldots, w_{n,n}),$$

gdzie $W_1 \in \mathrm{TRIL}^{n,n} \cup \mathrm{TRIU}^{n,n}$ z jedynkami na głównej przekątnej. Stosując kolejno (9.1) i (9.2) (z macierzą odpowiednio trójkątną górną albo trójkątną dolną) dostajemy

$$\det(A * W) = \det(A * W_1) \cdot \prod_{i=1}^{n} w_{i,i} = \det(A) \cdot \prod_{i=1}^{n} w_{i,i}. \tag{9.3}$$

Jeśli zaś $w_{k,k} = 0$ dla pewnego k to W jest osobliwa, a stąd osobliwa jest również macierz $A * W$ i równanie $\det(A * W) = \det(A) \cdot \prod_{i=1}^{n} w_{i,i}$ pozostaje w mocy.

Możemy teraz pokazać następujące twierdzenie

Twierdzenie 9.5 *Dla dowolnych macierzy* $A, B \in \mathbf{K}^{n,n}$

$$\det(A * B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Dowód. Skorzystamy z twierdzenia, że dla dowolnej macierzy B istnieje rozkład trójkątno-trójkątny $P * B * Q^T = L * R$, czyli

$$B = P^T * L * R * Q,$$

gdzie $P = T_{1,p(1)} * \cdots * T_{n-1,p(n-1)}$ i $Q = T_{1,q(1)} * \ldots * T_{n-1,q(n-1)}$ są macierzami permutacji, L jest trójkątna dolna z jedynkami na przekątnej, a R trójkątna górna. Jasne, że $\det(P) = (-1)^s$, gdzie s jest liczbą właściwych przestawień w p (tzn. liczbą tych i dla których $i \neq p(i)$), oraz podobnie $\det Q = (-1)^t$, gdzie t jest liczbą właściwych przestawień w q. Wykorzystując wielokrotnie twierdzenie 9.2 oraz wzór (9.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\det(A * B) &= \det(A * P^T * L * R) \cdot (-1)^t \\
&= \det(A * P^T * L)(-1)^t \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{i,i} \\
&= \det(A * P^T)(-1)^t \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{i,i} \\
&= \det(A)(-1)^{s+t} \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{i,i} \\
&= \det(A) * \det(B),
\end{aligned}$$

co należało pokazać.

9.3.2 Wyznacznik macierzy nieosobliwej i transponowanej

Jak zauważyliśmy wcześniej w dowodzie twierdzenia 9.5, rozkład macierzy $A = P^T * L * R * Q$ implikuje równość

$$\det(A) = (-1)^{s+t} \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{i,i},$$

która z kolei daje dwa następujące ważne wnioski.

Wniosek 9.2 *Macierz A jest nieosobliwa, tzn.* $\mathrm{rz}(A) = n$*, wtedy i tylko wtedy gdy* $\det(A) \neq 0$.

Wniosek 9.3 *Dla dowolnej macierzy kwadratowej A mamy*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Ostatni wniosek oznacza, że wszystkie własności wyznacznika dotyczące kolumn macierzy przysługują również jej wierszom. W szczególności, wyznacznik można rozwijać względem dowolnego wiersza,

$$\det_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det_{n-1}(A_{i,j}).$$

9.4 Definicja kombinatoryczna wyznacznika

Każda macierz permutacji $P \in \mathbf{K}^{n,n}$ może być rozłożona na wiele sposobów na iloczyn transpozycji, np.

$$P = T_{1,i_1} * T_{2,i_2} * \cdots * T_{n-1,i_{n-1}}. \tag{9.4}$$

Ponieważ

$$\det(T_{p,q}) = \begin{cases} 1, & p = q \quad \text{(transpozycja niewłaściwa)}, \\ -1, & p \neq q \quad \text{(transpozycja właściwa)}, \end{cases}$$

to

$$\det(P) = (-1)^{\sigma(p)},$$

gdzie $\sigma(p) = 0$ gdy liczba transpozycji właściwych w rozkładzie (9.4) jest parzysta, oraz $\sigma(p) = 1$ gdy liczba transpozycji właściwych w (9.4) jest nieparzysta. Pokazaliśmy więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9.6 *W rozkładzie macierzy permutacji na iloczyn transpozycji liczba transpozycji właściwych jest zawsze parzysta, albo zawsze nieparzysta.*

Parzystość lub nieparzystość permutacji jest więc własnością permutacji (niezależną od rozkładu).

Definicja Laplace'a wyznacznika jest równoważna następującej definicji *kombinatorycznej*:

$$\det_n(A) = \sum_{p=[p(1),\ldots,p(n)]} (-1)^{\sigma(p)} \prod_{j=1}^{n} a_{p(j),j},$$

albo

$$\det_n(A) = \sum_{q=[q(1),\ldots,q(n)]} (-1)^{\sigma(q)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,q(i)}.$$

Indukcyjny dowód równoważności tych definicji pomijamy. (Tutaj p i q są permutacjami ciągu $[1, 2, \ldots, n]$, przy czym $p \circ q = q \circ p = \mathrm{Id} = [1, 2, \ldots, n]$. Wtedy $\sigma(p) = \sigma(q)$.)

9.5 Wzory Cramera

Pokażemy teraz, że układy równań liniowych można, przynajmniej teoretycznie, rozwiązywać za pomocą liczenia odpowiednich wyznaczników.

Definicja 9.2 *Macierz $C(A) := (\gamma_{i,j}) \in \mathbf{K}^{n,n}$, gdzie*

$$\gamma_{i,j} = (-1)^{i+j} \det_{n-1}(A_{i,j}),$$

nazywamy macierzą komplementarną *do danej macierzy $A \in \mathbf{K}^{n,n}$.*

Zauważmy, że na podstawie rozwinięcia Laplace'a mamy

$$p_{j,k} := \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,j} a_{i,k} = \begin{cases} \det_n(A), & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

a stąd

$$P = (p_{j,k})_{j,k=1}^{n} = \det_n(A) * I_n = (C(A))^T * A.$$

Zatem jeśli $\mathrm{rz}(A) = n$ to

$$A^{-1} = \frac{(C(A))^T}{\det_n(A)} = \left(\frac{(-1)^{i+j} \det_{n-1}(A_{j,i})}{\det_n(A)} \right)_{i,j=1}^{n}.$$

Rozpatrzmy teraz układ równań $A * \vec{x} = \vec{b}$ z kwadratową i nieosobliwą macierzą $A \in \mathbf{K}^{n,n}$. Wtedy jego rozwiązanie

$$\vec{x} = (x_j)_{j=1}^n \;=\; A^{-1} * \vec{b} \;=\; \frac{(C(A))^T * \vec{b}}{\det_n(A)},$$

czyli

$$x_j \;=\; \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_{i,j} * b_i}{\det_n(A)} \;=\; \frac{\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det_{n-1}(A_{i,j}) \cdot b_i}{\det_n(A)},$$

albo równoważnie

$$x_j \;=\; \frac{\det_n([\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n])}{\det_n([\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_j, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n])},$$

dla $1 \le j \le n$. Ostatnie formuły zwane są WZORAMI CRAMERA.

Uwaga. Wzory Cramera mają dla dużych n znaczenie jedynie teoretyczne, gdyż, jak łatwo się przekonać, koszt liczenia wyznacznika macierzy wprost z definicji jest proporcjonalny do $n!$ W takich przypadkach lepiej stosować eliminację Gaussa, której koszt obliczeniowy jest proporcjonalny do n^3.