Rozdział 8

Przekształcenia liniowe

8.1 Podstawowe pojęcia i własności

Niech $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ i $\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}}$ będą dwiema przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbf{K}$.

Definicja 8.1 *Przekształcenie $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ nazywamy* przekształceniem liniowym *$\mathcal{X}$ w $\mathcal{Y}$ jeśli $\forall x, y \in \mathcal{X}$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}$ zachodzi równość*

$$f(x * \alpha + y * \beta) = f(x) * \alpha + f(y) * \beta.$$

8.1.1 Obraz, jądro i rząd przekształcenia

Dla $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}$, zbiór

$$f(\mathcal{X}_1) := \{f(x) : x \in \mathcal{X}_1\}$$

nazywamy *obrazem* zbioru $\mathcal{X}_1$.

Jeśli $\mathcal{X}_1$ jest podprzestrzenią $\mathcal{X}$ to $f(\mathcal{X}_1)$ jest podprzestrzenią $\mathcal{Y}$. Rzeczywiście, jeśli $y_1, y_2 \in f(\mathcal{X}_1)$ to dla pewnych $x_1, x_2 \in \mathcal{X}_1$ mamy $y_1 = f(x_1)$ i $y_2 = f(x_2)$. Stąd dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$ mamy

$$y_1 * \alpha_1 + y_2 * \alpha_2 = f(x_1) * \alpha_1 + f(x_2) * \alpha_2 = f(x_1 * \alpha_1 + x_2 * \alpha_2) \in f(\mathcal{X}_1).$$

W szczególności, $f(\mathcal{X})$ oraz $f(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{0}\}$ są podprzestrzeniami.

Łatwo również sprawdzić, że obrazem warstwy $W(x_0, \mathcal{X}_1) \subseteq \mathcal{X}$ jest warstwa $W(f(x_0), f(\mathcal{X}_1)) \subseteq \mathcal{Y}$. A więc bycie podprzestrzenią, elementem zerowym albo warstwą są *niezmiennikami* przekształceń liniowych.

Podobnie jak dla macierzy definiujemy *obraz* przekształcenia liniowego f

$$\mathrm{im}(f) := f(\mathcal{X}) = \{f(x) : x \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{Y},$$

jego *jądro*

$$\ker(f) := \{x \in \mathcal{X} : f(x) = \mathbf{0}\} \subseteq \mathcal{X},$$

oraz *rząd*

$$\mathrm{rank}(f) := \dim(\mathrm{im}(f)).$$

Oczywiście, jądro jest też podprzestrzenią.

Twierdzenie 8.1 *Dla dowolnego przekształcenia liniowego f mamy*

$$\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\ker(f)).$$

Dowód. Niech $\mathcal{X}_1$ będzie tak zdefiniowane, że

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \ker(f).$$

Wtedy $\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{X}_1) + \dim(\ker(f))$. Pokażemy, że $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathcal{X}_1)$. W tym celu zauważmy, że każdy $x \in \mathcal{X}$ można jednoznacznie przedstawić jako $x = x_1 + x_0$, gdzie $x_1 \in \mathcal{X}_1$ i $x_0 \in \ker(f)$. Stąd

$$\mathrm{im}(f) = \{f(x_1 + x_0) : x_1 \in \mathcal{X}_1, x_0 \in \ker(f)\} = \{f(x_1) : x_1 \in \mathcal{X}_1\}.$$

Teraz wystarczy pokazać, że $\dim(\mathcal{X}_1) = \dim(f(\mathcal{X}_1))$. Rzeczywiście, niech

$$\mathbb{A} = [x_1, \ldots, x_s] \in \mathcal{X}^{1,s}$$

będzie bazą $\mathcal{X}_1$ ($s = \dim(\mathcal{X}_1)$) oraz

$$\mathbb{B} = [f(x_1), \ldots, f(x_s)] \in \mathcal{Y}^{1,s}.$$

Wtedy $f(\mathcal{X}_1) = \mathrm{span}(f(x_1), \ldots, f(x_s))$ oraz układ $\{f(x_j)\}_{j=1}^s$ jest liniowo niezależny. Jeśli bowiem $\mathbb{B} * \vec{\alpha} = \mathbf{0}$ to również $f(\mathbb{A} * \vec{\alpha}) = \mathbf{0}$. Ponieważ $\mathbb{A} * \vec{\alpha} \notin \ker(f) \setminus \{\mathbf{0}\}$ to $\mathbb{A} * \vec{\alpha} = \mathbf{0}$ i z liniowej niezależności $\{x_j\}_{j=1}^s$ dostajemy $\vec{\alpha} = \vec{0}$. Otrzymaliśmy, że $\mathbb{B}$ jest bazą $f(\mathcal{X}_1)$ i $\dim(f(\mathcal{X}_1)) = s = \dim(\mathcal{X}_1)$.

8.1.2 Przykłady

- Każda macierz $A \in \mathbf{K}^{m,n}$ może być identyfikowana z przekształceniem liniowym $f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ danym wzorem

  $$f(\vec{x}) = A * \vec{x}, \qquad \vec{x} \in \mathbf{K}^n.$$

  Wtedy $\mathrm{im}(f) = \mathcal{R}(A)$, $\ker(f) = \mathcal{N}(A)$ oraz $\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rz}(A)$. Twierdzenie 8.1 sprowadza się w tym przypadku do wniosku 5.1.

  W szczególności, funkcjonały liniowe są przekształceniami liniowymi. Wtedy $A \in \mathbf{K}^{1,n}$ oraz $\mathcal{Y} = \mathbf{K}$.

- Niech $f : \mathcal{P}^{10}_{|\mathbf{R}} \to \mathcal{P}^{10}_{|\mathbf{R}}$, $f(p) = p''$ (druga pochodna). Wtedy $\ker(f) = \mathcal{P}^{2}_{|\mathbf{R}}$ i $\mathrm{im}(f) = \mathcal{P}^{8}_{|\mathbf{R}}$.

- Jeśli zaś w poprzednim przykładzie $f(p) = p' - p$ to $\mathrm{im}(f) = \mathcal{P}^{10}_{|\mathbf{R}}$ oraz $\ker(f) = \mathcal{P}^{0}_{|\mathbf{R}} = \{\mathbf{0}\}$.

8.1.3 Różnowartościowość

Twierdzenie 8.2 *Na to, aby przekształcenie liniowe $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ było różnowartościowe potrzeba i wystarcza, że* $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Dowód. Jeśli f jest różnowartościowe to tylko dla $x = \mathbf{0}$ mamy $f(x) = \mathbf{0}$, czyli $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$. Z drugiej strony, jeśli $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ i $f(x_1) = f(x_2) = \mathbf{0}$ to $f(x_1 - x_2) = \mathbf{0}$, a stąd $x_1 - x_2 = \mathbf{0}$ i $x_1 = x_2$, co kończy dowód.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że jeśli $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ to istnieje przekształcenie "odwrotne" $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathcal{X}$ takie, że $\forall x \in \mathcal{X}\ f^{-1}(f(x)) = x$ oraz $\forall y \in \mathrm{im}(f)\ f(f^{-1}(y)) = y$. Ponadto f^{-1} jest liniowe, bo jeśli $y_1, y_2 \in \mathrm{im}(f)$ to definiując $x_1 = f^{-1}(y_1)$ i $x_2 = f^{-1}(y_2)$ mamy

$$\begin{aligned}
f^{-1}(y_1 * \alpha_1 + y_2 * \alpha_2) &= f^{-1}\left(f(x_1) * \alpha_1 + f(x_2) * \alpha_2\right) \\
&= f^{-1}\left(f(x_1 * \alpha_1 + x_2 * \alpha_2)\right) \\
&= x_1 * \alpha_1 + x_2 * \alpha_2 \\
&= f^{-1}(y_1) * \alpha_1 + f^{-1}(y_2) * \alpha_2.
\end{aligned}$$

Mówiąc inaczej, każde różnowartościowe przekształcenie liniowe $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ustala izomorfizm pomiędzy $\mathcal{X}$ i swoim obrazem $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathcal{Y}$.

8.1.4 Przestrzeń przekształceń liniowych

Zbiór wszystkich przekształceń liniowych z $\mathcal{X}$ w $\mathcal{Y}$ tworzy przestrzeń liniową nad $\mathbf{K}$, jeśli działania dodawania przekształceń i mnożenia przez skalar zdefiniowane są w naturalny sposób jako:

$$(\alpha * f)(x) = \alpha * f(x), \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Przestrzeń tą oznaczamy $(\mathcal{X} \to \mathcal{Y})_{|\mathbf{K}}$ albo $\mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Oczywiście, elementem neutralnym (zerowym) tej przestrzeni jest przekształcenie zerowe, a przeciwnym do f jest $(-f)$.

Podobnie jak dla funkcjonałów, dla wygody będziemy często stosować zapis

$$f \cdot x := f(x), \qquad \forall f \in \mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Uwaga. Zauważmy, że wobec równości

$$(\alpha * f + \beta * g) \cdot x = \alpha * (f \cdot x) + \beta * (g \cdot x)$$

każdy wektor $x \in \mathcal{X}$ może być traktowany jako element przestrzeni

$$\mathcal{L}in\left(\mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \mathcal{Y}\right).$$

Jednak w ogólności nie mamy równości pomiędzy $\mathcal{L}in\left(\mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \mathcal{Y}\right)$ i $\mathcal{X}$, tak jak jest w przypadku $\mathcal{Y} = \mathbf{K}$.

8.2 Macierz przekształcenia liniowego

8.2.1 Definicja

Niech $\dim(\mathcal{X}) = n$, $\dim(\mathcal{Y}) = m$. Niech

$$\mathbb{A} = [x_1, \ldots, x_n] \in \mathcal{X}^{1,n}, \qquad \mathbb{B} = [y_1, \ldots, y_m] \in \mathcal{Y}^{1,m}$$

będą odpowiednio bazami $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$. Wtedy

$$\mathcal{X} = \{\mathbb{A} * \vec{a} : \vec{a} \in \mathbf{K}^n\}, \qquad \mathcal{Y} = \{\mathbb{B} * \vec{b} : \vec{b} \in \mathbf{K}^m\}.$$

Przypomnijmy, że $\mathbb{B}^{-1}$ jest wektorem funkcjonałów,

$$\mathbb{B}^{-1} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \in (\mathcal{Y}^*)^{m,1},$$

gdzie $r_j \in \mathcal{Y}^*$, $1 \leq j \leq m$, tworzą bazę $\mathcal{Y}^*$ sprzężoną do $\mathbb{B}$.

Niech $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ będzie przekształceniem liniowym i $y = f \cdot x$. Przyjmując $x = \mathbb{A} * \vec{a}$ i $y = \mathbb{B} * \vec{b}$ mamy

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \mathbb{B}^{-1} \cdot y \;=\; \mathbb{B}^{-1} \cdot (f \cdot x) \\ &= \mathbb{B}^{-1} \cdot (f \cdot (\mathbb{A} * \vec{a})) \;=\; \left(\mathbb{B}^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{A}\right) * \vec{a} \\ &= F * \vec{a}, \end{aligned}$$

gdzie $F \in \mathbf{K}^{m,n}$,

$$F \;=\; \mathbb{B}^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{A},$$

jest macierzą o wyrazach $f_{i,j} = r_i(f(x_j))$, tzn. w j-tej kolumnie macierzy F stoją współczynniki rozwinięcia wektora $f(x_j)$ w bazie $[y_1, \ldots, y_m]$.

Definicja 8.2 *Macierz liczbową* $F = \mathbb{B}^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{A}$ *nazywamy* macierzą przekształcenia $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ w bazach $\mathbb{A}$ *i* $\mathbb{B}$ *odpowiednio przestrzeni* $\mathcal{X}$ *i* $\mathcal{Y}$.

8.2.2 Izomorfizm $\mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i $\mathbf{K}^{m,n}$

Niech $\Phi : \mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to \mathbf{K}^{m,n}$,

$$\Phi(f) = \mathbb{B}^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{A}, \qquad \forall f \in \mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y}).$$

Odwzorowanie Φ przyporządkowujące przekształceniu liniowemu jego macierz jest liniowe (zachowuje kombinacje liniowe). Jeśli bowiem $\Phi(f) = F$ i $\Phi(g) = G$ to

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha * f + \beta * g) &= \mathbb{B}^{-1} \cdot (\alpha * f + \beta * g) \cdot \mathbb{A} \\ &= \alpha * (\mathbb{B}^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{A}) + \beta * (\mathbb{B}^{-1} \cdot g \cdot \mathbb{A}) \\ &= \alpha * \Phi(f) + \beta * \Phi(g). \end{aligned}$$

Ponadto, łatwo sprawdzić, że Φ jest wzajemnie jednoznaczne i odwzorowanie odwrotne $\Phi : \mathbf{K}^{m,n} \to \mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ wyraża się wzorem

$$\Phi^{-1}(F) \;=\; \mathbb{B} * F * \mathbb{A}^{-1}, \qquad \forall F \in \mathbf{K}^{m,n}.$$

Stąd Φ jest izomorfizmem a przestrzenie $\mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i $\mathbf{K}^{m,n}$ są izomorficzne.

Ponieważ dla przestrzeni macierzy mamy $\dim(\mathbf{K}^{m,n}) = m \cdot n$, otrzymujemy w szczególności wniosek, że

$$\dim\left(\mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\right) \;=\; \dim(\mathcal{X}) \cdot \dim(\mathcal{Y}).$$

Przykładową bazę $\mathcal{L}in(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ tworzą przekształcenia $\varphi_{i,j}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, dane wzorem $\varphi_{i,j} = \Phi^{-1}(E_{i,j})$ (gdzie $E_{i,j}$ ma jedynkę na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny, a poza tym zera). Dokładniej, dla $x = \mathbb{A} * \vec{a}$, $\vec{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]^T$, mamy

$$f_{i,j} \cdot x = (\mathbb{B} * E_{i,j} * \mathbb{A}^{-1}) * \mathbb{A} * \vec{a} = \mathbb{B} * (E_{i,j} * \vec{a}) = (\mathbb{B} * \vec{e}_i) * \alpha_j = \vec{y}_i * \alpha_j.$$

8.3 Dalsze własności macierzy przekształceń

8.3.1 Obraz i jądro przekształcenia/macierzy

Twierdzenie 8.3 *Mamy*

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(f) &= \mathbb{B} * \mathcal{R}(F) := \{\mathbb{B} * \vec{b} : \vec{b} \in \mathcal{R}(F)\}, \\ \ker(f) &= \mathbb{A} * \mathcal{N}(F) := \{\mathbb{A} * \vec{a} : \vec{a} \in \mathcal{N}(F)\}. \end{aligned}$$

Dowód. Bezpośrednio sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(f) &= \{f \cdot x : x \in \mathcal{X}\} = \{f \cdot \mathbb{A} * \vec{a} : \vec{a} \in \mathbf{K}^n\} \\ &= \{\mathbb{B} * (\mathbb{B}^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{A}) * \vec{a} : \vec{a} \in \mathbf{K}^n\} = \{\mathbb{B} * F * \vec{a} : \vec{a} \in \mathbf{K}^n\} \\ &= \{\mathbb{B} * \vec{b} : \vec{b} \in \mathcal{R}(F)\}, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{x \in \mathcal{X} : f \cdot x = \mathbf{0}\} = \{\mathbb{A} * \vec{a} \in \mathcal{X} : f \cdot \mathbb{A} * \vec{a} = \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbb{A} * \vec{a} : \mathbb{B} * (\mathbb{B}^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{A}) * \vec{a} = \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbb{A} * \vec{a} : \mathbb{B} * F * \vec{a} = \mathbf{0}\} = \{\mathbb{A} * \vec{a} : F * \vec{a} = \mathbf{0}\} \\ &= \{\mathbb{A} * \vec{a} : \vec{a} \in \mathcal{N}(F)\}. \end{aligned}$$

Na podstawie twierdzenia 8.3 możemy powiedzieć, że $\mathbb{B}$ ($\mathbb{B}^{-1}$) jest izomorfizmem $\mathcal{R}(F)$ w $\mathrm{im}(f)$ ($\mathrm{im}(f)$ w $\mathcal{R}(F)$), a $\mathbb{A}$ ($\mathbb{A}^{-1}$) jest izomorfizmem $\mathcal{N}(F)$ w $\ker(f)$ ($\ker(f)$ w $\mathcal{N}(F)$).

8.3.2 Zmiana bazy

Zastanówmy się jak wygląda zależność pomiędzy współczynnikami rozwinięcia danego wektora $x \in \mathcal{X}$ w dwóch różnych bazach $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ przestrzeni $\mathcal{X}$.

Formalnie możemy rozpatrzyć macierz przekształcenia identycznościowego $f = \mathrm{id}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(x) = x$. Zapisując x z jednej strony jako $x = \mathbb{A} * \vec{a}$, a z drugiej jako $x = \mathbb{B} * \vec{b}$ otrzymujemy

$$\vec{b} = \left(\mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A}\right) * \vec{a}.$$

Macierz $F = \mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A} \in \mathbf{K}^{n,n}$ o współczynnikach $f_{i,j} = r_i \cdot x_j$ nazywa się *macierzą zmiany bazy* z $\mathbb{A}$ na $\mathbb{B}$.

Oczywiście, macierz zmiany bazy jest nieosobliwa.

Podamy teraz charakterystyczny przykład zmiany bazy. Niech $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}} = \mathcal{P}^n_{|\mathbf{R}}$ będzie przestrzenią wielomianów stopnia co najwyżej $n-1$. Rozpatrzmy bazę potęgową $\mathbb{A} = [1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}]$ oraz bazę $\mathbb{B} = [l_1, \ldots, l_n]$, gdzie l_i są wielomianami Lagrange'a zdefiniowanymi w (6.1) dla ustalonych węzłów $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Wtedy funkcjonały r_k, $1 \le k \le n$, tworzące macierz $\mathbb{B}^{-1}$, dane są wzorem $r_k(p) = p(t_k)\ \forall p \in \mathcal{P}^n_{|\mathbf{R}}$. Stąd współczynniki macierzy przejścia $F = \mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A} \in \mathbf{K}^{n,n}$ wynoszą $f_{i,j} = (t_i)^j$, czyli

$$F = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Jest to *macierz Vandermonde'a*. Zauważmy, że "przy okazji" pokazaliśmy, iż macierz Vandermonde'a, jako macierz zmiany bazy, jest nieosobliwa.

8.3.3 Złożenie przekształceń

Niech $f \in \mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i $g \in \mathcal{L}in(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Wtedy złożenie (superpozycja)

$$g \circ f : \mathcal{X} \to \mathcal{Z},$$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))\ \forall x$ jest też liniowe, tzn. $(g \circ f) \in \mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1 * \alpha_1 + x_2 * \alpha_2) &= g(f(x_1) * \alpha_1 + f(x_2) * \alpha_2) \\ &= (g \circ f)(x_1) * \alpha_1 + (g \circ f)(x_2)\alpha_2. \end{aligned}$$

Twierdzenie 8.4 *Niech* $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ *i* $\mathbb{C}$ *będą odpowiednio bazami przestrzeni* $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ *i* $\mathcal{Z}$. *Niech* $f \in \mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $g \in \mathcal{L}in(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, *a* F, G *będą odpowiednio macierzami przekształceń* f *i* g *w podanych bazach. Wtedy macierz złożenia* $h = g \circ f \in \mathcal{L}in(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ *wynosi*

$$H = G * F.$$

Dowód. Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\begin{aligned} H &= \mathbb{C}^{-1} \cdot h \cdot \mathbb{A} = \mathbb{C}^{-1} \cdot g \cdot f \cdot \mathbb{A} \\ &= \left(\mathbb{C}^{-1} \cdot g \cdot \mathbb{B}\right) * \left(\mathbb{B}^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{A}\right) \\ &= G * F. \end{aligned}$$