Rozdział 6

Funkcjonały liniowe

6.1 Funkcjonały

6.1.1 Definicja i przykłady

Niech $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ będzie przestrzenią liniową, $\dim(\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}) < \infty$.

Definicja 6.1 *Odwzorowanie*

$$s : \mathcal{X} \to \mathbf{K}$$

nazywamy funkcjonałem (liniowym) *na* $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ *gdy dla dowolnych* $a, b \in \mathcal{X}$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$

$$s(a * \alpha + b * \beta) = s(a) * \alpha + s(b) * \beta.$$

Zbiór wszystkich funkcjonałów (liniowych) na $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ *oznaczamy przez* $\mathcal{X}^*$.

Podamy teraz kilka przykładów funkcjonałów.

W przestrzeni wektorów $\mathbf{K}^n_{|\mathbf{K}}$ funkcjonałami są przekształcenia postaci

$$s(\vec{x}) = \hat{a}^T * \vec{x}, \qquad \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n,$$

gdzie $\hat{a} \in \mathbf{K}^n$ jest ustalonym wektorem. (Tu wyjaśnia się tajemnica nazwania wcześniej funkcjonałem macierzy jednowierszowej.)

W przestrzeni macierzy $\mathbf{K}^{m,n}_{|\mathbf{K}}$ funkcjonałami są np. $s_1(A) = a_{2,3}$, $s_2(A) = \mathrm{tr}(A) := \sum_{j=1}^{\min(m,n)} a_{j,j}$ (jest to *ślad* macierzy), przy czym $A = (a_{i,j}) \in \mathbf{K}^{m,n}$.

W przestrzeni wielomianów $\mathcal{P}^n_{|\mathbf{R}}$ funkcjonałami są np. $s_1(p) = p(2)$, $s_2(p) = 3 * p(-1) - 7 * p(3)$,

$$s_3(p) = \frac{d^2p}{dt^2}\Big|_{t=1} = p''(1), \qquad s_4(p) = \int_0^1 p(t)dt,$$

przy czym $p \in \mathcal{P}^n$.

6.1.2 Przestrzeń sprzężona

Na zbiorze $\mathcal{X}^*$ możemy w naturalny sposób zdefiniować dodawanie funkcjonałów $s_1, s_2 \in \mathcal{X}^*$,

$$(s_1 + s_2)(a) := s_1(a) + s_2(a), \qquad \forall a \in \mathcal{X},$$

oraz mnożenie funkcjonału $s \in \mathcal{X}^*$ przez skalar $\alpha \in \mathbf{K}$,

$$(\alpha * s)(a) := \alpha * s(a), \qquad \forall a \in \mathcal{X}.$$

Twierdzenie 6.1 *Zbiór $\mathcal{X}^*$ z powyżej zdefiniowanymi działaniami dodawania funkcjonałów i mnożenia przez skalar jest przestrzenią liniową nad $\mathbf{K}$.*

Dowód tego twierdzenia polega na bezpośrednim sprawdzeniu warunków bycia przestrzenią liniową. Tutaj zauważymy tylko, że elementem zerowym $\mathcal{X}^*_{|\mathbf{K}}$ jest funkcjonał zerowy, $\mathbf{0}^*(a) = 0\ \forall a \in \mathcal{X}$, a elementem przeciwnym do $s \in \mathcal{X}^*$ jest funkcjonał $(-s)$ zdefiniowany jako $(-s)(a) = -s(a)\ \forall a \in \mathcal{X}$.

Definicja 6.2 *Przestrzeń $\mathcal{X}^*_{|\mathbf{K}}$ nazywamy* przestrzenią sprzężoną *do $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$.*

Skoro $\mathcal{X}^*_{|\mathbf{K}}$ jest przestrzenią liniową to możemy spytać o jej wymiar i bazę.

Twierdzenie 6.2 *Mamy*

$$\dim\left(\mathcal{X}^*_{|\mathbf{K}}\right) = \dim\left(\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}\right).$$

Ponadto, jeśli układ wektorów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest bazą $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ to układ funkcjonałów $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ zdefiniowany warunkami

$$s_k(a_j) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

gdzie $1 \le j, k \le n$, jest bazą $\mathcal{X}^*_{|\mathbf{K}}$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że s_k są formalnie dobrze zdefiniowanymi funkcjonałami. Dla dowolnego $a = \sum_{j=1}^n a_j * \alpha_j \in \mathcal{X}$ mamy bowiem

$$s_k(a) = s_k \left(\sum_{j=1}^n a_j * \alpha_j \right) = \sum_{j=1}^n s_k(a_j) * \alpha_j = \alpha_k.$$

Stąd s_k "zwraca" k-tą współrzędną rozwinięcia wektora a w bazie wektorów $(a_1, \ldots, a_n)$.

Pokażemy najpierw liniową niezależność funkcjonałów s_k, $1 \le k \le n$. W tym celu załóżmy, że liniowa kombinacja $s := \sum_{k=1}^n s_k * \alpha_k = \mathbf{0}^*$. Wtedy, w szczególności, dla każdego j mamy $s(a_j) = 0$, a ponieważ

$$s(a_j) = \left(\sum_{k=1}^n s_k * \alpha_k \right) (a_j) = \sum_{k=1}^n s_k(a_j) * \alpha_k = \alpha_j$$

to $\alpha_j = 0$.

Pozostaje pokazać, że funkcjonały s_k, $1 \le k \le n$, rozpinają $\mathcal{X}^*$. Rzeczywiście, dla dowolnego $s \in \mathcal{X}^*$ oraz $a = \sum_{j=1}^n a_j * \alpha_j \in \mathcal{X}$ mamy

$$\begin{aligned} s(a) &= s \left(\sum_{j=1}^n a_j * \alpha_j \right) = \sum_{j=1}^n s(a_j) * \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sigma_j * s_j(a) = \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j * s_j \right) (a), \end{aligned}$$

gdzie $\sigma_j = s(a_j)$. Stąd $s = \sum_{j=1}^n \sigma_j * s_j$ jest kombinacją liniową funkcjonałów s_j i w konsekwencji $\mathcal{X}^* = \mathrm{span}(s_1, \ldots, s_n)$.

6.2 Refleksywność

6.2.1 Równość $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}^{**}$

Dla wygody wprowadzimy oznaczenie

$$s \cdot a := s(a), \qquad \forall s \in \mathcal{X}^* \ \forall a \in \mathcal{X}.$$

Zauważmy, że zapis $s \cdot a$ możemy traktować jako działanie funkcjonału s na wektor a, ale też odwrotnie, jako działanie wektora a na funkcjonał s. Ponieważ dodatkowo dla dowolnych $s_1, s_2 \in \mathcal{X}^*$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$ mamy

$$(\alpha_1 * s_1 + \alpha_2 * s_2) \cdot a = \alpha_1 * (s_1 \cdot a) + \alpha_2 * (s_2 \cdot a),$$

możemy traktować wektor a jako funkcjonał na $\mathcal{X}^*_{|\mathbf{K}}$, tzn. $a \in \mathcal{X}^{**} := (\mathcal{X}^*)^*$. Mamy więc $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^{**}$, a ponieważ na podstawie twierdzenia 6.2

$$\dim\left(\mathcal{X}_{|\mathcal{K}}\right) = \dim\left(\mathcal{X}^*_{|\mathcal{K}}\right) = \dim\left(\mathcal{X}^{**}_{|\mathcal{K}}\right)$$

to

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^{**}.$$

Ostatnia własność nazywa się *refleksywnością*. [1]

Dodajmy, że jeśli $(s_1, \ldots, s_n)$ jest bazą $\mathcal{X}^*$ sprzężoną do bazy $(a_1, \ldots, a_n)$ to też odwrotnie, $(a_1, \ldots, a_n)$ jest bazą $\mathcal{X}^{**} = \mathcal{X}$ sprzężoną do $(s_1, \ldots, s_n)$. Wynika to bezpośrednio z faktu, że $s_j \cdot a_k$ wynosi 1 dla $j = k$ oraz zero dla $j \neq k$.

6.2.2 Przykłady

Podamy teraz przykłady baz i baz sprzężonych.

Niech $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}} = \mathbf{K}^n_{|\mathbf{K}}$. Bazą sprzężoną do bazy $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ przestrzeni wektorów $\mathbf{K}^n_{|\mathbf{K}}$ jest $(\vec{e}_1^{\,T}, \ldots, \vec{e}_n^{\,T})$. Stąd w szczególności wynika że

$$(\mathbf{K}^n)^* = (\mathbf{K}^n)^T.$$

W ogólnym przypadku, bazą sprzężoną do dowolnej bazy $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ jest $(\hat{a}_1^T, \ldots, \hat{a}_n^T)$, gdzie wektory $\hat{a}_j$ są tak dobrane, że transpozycja macierzy $\hat{A} := [\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n]$ jest lewą odwrotnością macierzy $A := [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$, tzn. $\hat{A}^T * A = I_n$. (Macierz $\hat{A}$ istnieje, bo istnieje baza sprzężona.)

Niech $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}} = \mathcal{P}^n_{|\mathbf{R}}$. Wtedy bazę sprzężoną do bazy potęgowej wielomianów $(1, t, t^2, \ldots, t^{n-1})$ tworzą funkcjonały $(s_1, \ldots, s_n)$ zdefiniowane jako

$$s_k(p) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}p}{dt^{k-1}}\bigg|_{t=0} = \frac{p^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}, \qquad \forall p \in \mathcal{P}^n.$$

Jeśli zaś $s_k(p) = p(t_k)$, $1 \leq k \leq n$, gdzie $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ są ustalonymi punktami, to bazę sprzężoną do bazy funkcjonałów $(s_1, \ldots, s_n)$ tworzą wielomiany *Lagrange'a* $(l_1, \ldots, l_n)$ zdefiniowane jako

$$l_j(t) = \prod_{j \neq i = 1}^{n} \frac{t - t_i}{t_j - t_i}. \tag{6.1}$$

[1] Pokazaliśmy, że przestrzenie skończenie wymiarowe są refleksywne. Warto dodać, że własność ta w ogólności *nie* zachodzi dla przestrzeni nieskończenie wymiarowych.

Rzeczywiście, łatwo sprawdzić, że

$$s_k(l_j) = l_j(t_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

6.3 Rozszerzenie rachunku macierzy

6.3.1 Macierze wektorów i funkcjonałów

W tym miejscu rozszerzymy nieco formalizm rachunku macierzy na macierze nieliczbowe, których elementami są wektory, a nawet funkcjonały. Pomoże nam to uprościć pewne rachunki na macierzach.

Niech $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ będzie przestrzenią liniową i $a_j \in \mathcal{X}$, $1 \leq j \leq k$. Wtedy możemy formalnie zdefiniować macierz jednowierszową wektorów

$$\mathbb{A} = [a_1, \ldots, a_k] \in \mathcal{X}^{1,k}.$$

Dla $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^k$ definiujemy w naturalny sposób mnożenie

$$\mathbb{A} * \vec{\alpha} := \sum_{j=1}^{k} a_j * \alpha_j,$$

będące skrótowym zapisem kombinacji liniowej wektorów a_j.

Podobnie, mając dane $s_j \in \mathcal{X}^*$, $1 \leq j \leq l$, możemy zdefiniować macierz jednokolumnową funkcjonałów

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_l \end{bmatrix} \in (\mathcal{X}^*)^{l,1}.$$

Dla $x \in \mathcal{X}$ definiujemy w naturalny sposób mnożenie

$$\mathbb{S} \cdot x := \begin{bmatrix} s_1 \cdot x \\ \vdots \\ s_l \cdot x \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{l,1}.$$

Co więcej, iloczyn $\mathbb{S} \cdot \mathbb{A}$ możemy również w naturalny sposób zdefiniować jako macierz

$$\mathbb{S} \cdot \mathbb{A} := (s_i \cdot a_j) \in \mathbf{K}^{l,k}.$$

Rzeczywiście, tak właśnie mnożymy macierz jednowierszową przez macierz jednokolumnową w przypadku macierzy liczbowych. Ponadto, dla dowolnego $\vec{\alpha} \in \mathbf{K}^k$ spełnona jest równość

$$\mathbb{S} \cdot (\mathbb{A} * \vec{\alpha}) = (\mathbb{S} \cdot \mathbb{A}) * \vec{\alpha}.$$

Idąc dalej możemy zapytać, czy ma sens mnożenie $\mathbb{A}$ przez $\mathbb{S}$. W przypadku macierzy liczbowych, mnożenie wektora-wiersza przez wektor-kolumnę jest możliwe tylko wtedy gdy wektory te mają tyle samo współrzędnych. Tak jest też teraz. Dokładniej jeśli $k = l$ to

$$\mathbb{A} * \mathbb{S} := \sum_{j=1}^{k} a_j * s_j$$

i interpretujemy ten zapis jako przekształcenie $\mathcal{X}$ w $\mathcal{X}$ zdefiniowane wzorem

$$(\mathbb{A} * \mathbb{S})(x) := \mathbb{A} * (\mathbb{S} \cdot x) = \sum_{j=1}^{k} a_j * s_j \cdot x.$$

W szczególności, $a \cdot s$ dla $a \in \mathcal{X}$ i $s \in \mathcal{X}^*$ jest przekształceniem "zwracającym" wektor a pomnożony przez wartość funkcjonału s.

6.3.2 Postać macierzowa izomorfizmów

Załóżmy teraz, że $\dim\left(\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}\right) = n$ oraz $(a_1, \ldots, a_n)$ jest bazą $\mathcal{X}$. Niech $\mathbb{A} = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathcal{X}^{1,n}$. Jasne jest, że wtedy odwzorowanie $f : \mathbf{K}^n \to \mathcal{X}$ zdefiniowane wzorem

$$f(\vec{\alpha}) := \mathbb{A} * \vec{\alpha}, \qquad \forall \vec{\alpha} \in \mathbf{K}^n,$$

jest izomorfizmem $\mathbf{K}^n$ w $\mathcal{X}$. Ponadto, izomorfizm odwrotny $f^{-1} : \mathcal{X} \to \mathbf{K}^n$ dany jest wzorem

$$f^{-1}(x) = \mathbb{S} \cdot x, \qquad \forall x \in \mathcal{X},$$

gdzie $\mathbb{S} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} \in (\mathcal{X}^*)^{n,1}$ oraz $(s_1, \ldots, s_n)$ jest bazą sprzężoną do bazy $(a_1, \ldots, a_n)$.

Sprawdzamy, że w tym przypadku

$$\mathbb{S} \cdot \mathbb{A} = (s_i \cdot a_j)_{i,j=1}^n = I_n$$

jest identycznością w $\mathbf{K}^n$, oraz że dla dowolnego $x = \mathbb{A} * \vec{\alpha}$ z $\vec{\alpha} \in \mathbf{K}^n$

$$(\mathbb{A} * \mathbb{S})(x) = (\mathbb{A} * \mathbb{S})(\mathbb{A} * \vec{\alpha}) = \mathbb{A} * (\mathbb{S} \cdot \mathbb{A}) * \vec{\alpha} = \mathbb{A} * \vec{\alpha} = x,$$

czyli $\mathbb{A} * \mathbb{S}$ jest identycznością w $\mathcal{X}$.

Możemy więc uznać, że $\mathbb{S}$ jest odwrotnością $\mathbb{A}$, jak również, że $\mathbb{A}$ jest odwrotnością $\mathbb{S}$, tj.

$$\mathbb{S} = \mathbb{A}^{-1} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{A} = \mathbb{S}^{-1}.$$