Rozdział 4

Przestrzenie liniowe

4.1 Przestrzenie i podprzestrzenie

4.1.1 Definicja i podstawowe własności

Niech $\mathcal{X}$ z działaniem dodawania '+' będzie grupą przemienną (abelową). Oznaczmy przez $\mathbf{0}$ element neutralny tej grupy, a przez $(-a)$ element przeciwny do $a \in \mathcal{X}$. Załóżmy ponadto, że w $\mathcal{X}$ zdefiniowane jest działanie '$*$' mnożenia przez *skalary*, czyli elementy pewnego ciała $\mathbf{K}$, które spełnia następujące warunki: [1]

(i) $\forall a \in \mathcal{X} \quad \forall \alpha \in \mathbf{K} \quad \alpha * a = a * \alpha \in \mathcal{X}$

(ii) $\forall a \in \mathcal{X} \quad 1 * a = a \qquad$ (gdzie 1 jest jedynką w $\mathbf{K}$)

(iii) $\forall a, b \in \mathcal{X} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}$

$$(\alpha + \beta) * a = \alpha * a + \beta * a$$
$$\alpha * (a + b) = \alpha * a + \alpha * b$$
$$(\alpha * \beta) * a = \alpha * (\beta * a).$$

Definicja 4.1 *Zbiór $\mathcal{X}$ z działaniami o wyżej wymienionych własnościach nazywamy* przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbf{K}$ *i oznaczamy $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ (albo po prostu $\mathcal{X}$).*

[1] Zauważmy, że symbolu '$*$' używamy zarówno do oznaczenia mnożenia skalaru przez element z grupy jak i mnożenia skalaru przez skalar. Podobnie '+' oznacza zarówno dodawanie w ciele $\mathbf{K}$ jak i w grupie $\mathcal{X}$. Nie prowadzi to jednak do niejednoznaczności, bo z kontekstu zawsze wiadomo o jakie działanie chodzi.

Podamy kilka elementarnych własności przestrzeni liniowych:

- $\forall a \in \mathcal{X} \quad 0 * a = \mathbf{0}$
- $\forall a \in \mathcal{X} \quad (-1) * a = -a$
- $\forall \alpha \in \mathbf{K}\ \forall a \in \mathcal{X} \quad [\, \alpha * a = \mathbf{0} \iff (\alpha = 0) \text{ lub } (a = \mathbf{0}) \,]$

Pierwsza własność wynika z równości $0 * a = (0 + 0) * a = 0 * a + 0 * a$, a druga z równości $\mathbf{0} = 0 * a = (1 + (-1)) * a = a + (-1) * a$. Implikacja w lewą stronę w ostatniej własności jest oczywista. Aby pokazać implikację w prawą stronę załóżmy, że $\alpha * \mathbf{0} = \mathbf{0}$ i $\alpha \neq 0$. Wtedy

$$a = 1 * a = (\alpha^{-1} * \alpha) * a = \alpha^{-1} * (\alpha * a) = \alpha^{-1} * \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Elementy przestrzeni liniowej $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ nazywamy zwykle *wektorami*, odwołując się do odpowiedniej interpretacji geometrycznej.

Przykładami przestrzeni liniowych są $\mathbf{R}^n_{|\mathbf{R}}$, $\mathbf{C}^n_{|\mathbf{R}}$, $\mathbf{C}^n_{|\mathbf{C}}$, $\mathbf{K}^{m,n}_{|\mathbf{K}}$. We wszystkich tych przykładach mnożenie wektora przez skalar zdefiniowane jest w naturalny sposób "wyraz po wyrazie". Przestrzeń liniową nad $\mathbf{R}$ (albo nad $\mathbf{C}$) tworzą też wielomiany stopnia co najwyżej $(n - 1)$ o współczynnikach rzeczywistych (albo zespolonych). Oznaczamy ją przez $\mathcal{P}^n_{|\mathbf{R}}$ (albo $\mathcal{P}^n_{|\mathbf{C}}$).

4.1.2 Podprzestrzenie liniowe

Definicja 4.2 *Niech $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ będzie przestrzenią liniową. Niepusty podzbiór $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ nazywamy* podprzestrzenią (liniową) *przestrzeni $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$, gdy $\mathcal{Y}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbf{K}$ (z działaniami jak w $\mathcal{X}$). Piszemy przy tym*

$$\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}} \subseteq \mathcal{X}_{|\mathbf{K}}.$$

Twierdzenie 4.1 *Na to, aby $\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}} \subseteq \mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ potrzeba i wystarcza, że:*

(i) $\forall a, b \in \mathcal{Y} \quad a + b \in \mathcal{Y}$

(ii) $\forall \alpha \in \mathbf{K} \quad \forall a \in \mathcal{Y} \quad \alpha * a \in \mathcal{Y}.$

Dowód. (i) i (ii) oznaczają, że dodawanie wektorów i mnożenie ich przez skalar nie wyprowadzają poza zbiór $\mathcal{Y}$. Pozostałe warunki bycia podprzestrzenią są w sposób oczywisty spełnione, bo są one spełnione w $\mathcal{X}$.

Szczególnymi przykładami podprzestrzeni są $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ (podprzestrzeń niewłaściwa) oraz $\mathcal{Y} = \{\mathbf{0}\}$ (podprzestrzeń zerowa).

Twierdzenie 4.2 *Część wspólna dowolnej rodziny podprzestrzeni przestrzeni liniowej $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ jest też podprzestrzenią $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$.*

Dowód. Niech $\{\mathcal{Y}_j\}_{j\in J}$, gdzie J jest (być może nieskończonym) zbiorem indeksów, będzie dowolną rodziną podprzestrzeni. Oznaczmy

$$\mathcal{Y} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{Y}_j.$$

Wobec twierdzenia 4.1 wystarczy pokazać, że działania dodawania i mnożenia przez skalar nie wyprowadzają poza zbiór $\mathcal{Y}$. Rzeczywiście, warunek $a, b \in \mathcal{Y}$ oznacza, że $a, b \in \mathcal{Y}_j$ dla wszystkich $j \in J$, a stąd również $a + b \in \mathcal{Y}_j$. W konsekwencji $a+b \in \cap_{j\in J}\mathcal{Y}_j = \mathcal{Y}$. Podobne uzasadnienie dla mnożenia przez skalar omijamy.

Ważnymi przykładami podprzestrzni liniowych przestrzeni macierzy $\mathbf{K}^{m,n}_{|\mathbf{K}}$ są $\mathrm{TRIL}^{m,n}$, $\mathrm{TRIU}^{m,n}$ oraz $\mathrm{DIAG}^{m,n}$. Podprzestrzeniami liniowymi w $\mathcal{P}^n_{|\mathbf{K}}$ są $\mathcal{P}^k_{|\mathbf{K}}$ z $k \le n$, albo wielomiany w których zmienna występuje tylko w potęgach parzystych. (Przyjmujemy przy tym, że $-\infty$, czyli stopień wielomianu zerowego, jest liczbą parzystą.)

4.2 Baza i wymiar przestrzeni

4.2.1 Liniowa (nie)zależność

Niech $\{b_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{X}$ oraz i $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subset \mathbf{K}$. Element

$$b = \sum_{j=1}^n \alpha_j * b_j$$

nazywamy *kombinacją liniową* elementów $\{b_j\}$, przy czym liczby $\{\alpha_j\}$ są współczynnikami tej kombinacji.

Zauważmy, że

$$B = \mathrm{span}(b_1, b_2, \ldots, b_n) \; := \; \Big\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j * b_j \; : \; \{\alpha_j\}_{j=1}^n \subset \mathbf{K} \Big\},$$

czyli zbiór wszystkich kombinacji liniowych danych elementów $\{b_j\}$, jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$. Mówimy, że B *jest rozpięta* na elementach $b_1, \ldots, b_n$.

Definicja 4.3 *Układ* $\{b_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{X}$ *jest* liniowo zależny *jeśli istnieje układ skalarów* $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subset \mathbf{K}$ *zawierający liczby niezerowe, dla którego*

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j * b_j = \mathbf{0}.$$

Definicja 4.4 *Układ* $\{b_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{X}$ *jest* liniowo niezależny *jeśli nie jest liniowo zależny, tzn. gdy dla dowolnych skalarów* $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ *z równości*

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j * b_j = \mathbf{0}$$

wynika, że $\alpha_j = 0$, $1 \le j \le n$.

Łatwo zauważyć, że dowolny (niepusty) podukład układu liniowo niezależnego jest układem liniowo niezależnym. Z drugiej strony, jeśli układ ma podukład liniowo zależny to układ wyjściowy jest liniowo zależny.

Rozpatrzmy dowolny układ $\{b_j\}_{j=1}^n$. Jeśli jest on liniowo zależny to istnieją $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ takie, że dla pewnego s mamy $\alpha_s \neq 0$ oraz $\sum_{j=1}^n \alpha_j * b_j = \mathbf{0}$. Wtedy

$$b_s = \sum_{s \neq j=1}^n \left(-\frac{\alpha_j}{\alpha_s} \right) * b_j,$$

czyli $b_s \in \mathrm{span}\,(b_1, \ldots, b_{s-1}, b_{s+1}, \ldots, b_n)$, a stąd

$$\mathrm{span}(b_1, \ldots, b_s, \ldots, b_n) = \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_{s-1}, b_{s+1}, \ldots, b_n).$$

Można tak postępować dalej otrzymując w końcu układ liniowo niezależny rozpinający tą samą przestrzeń co $\{b_j\}_{j=1}^n$. (Ponieważ układ wyjściowy jest skończony, proces "wyjmowania" kolejnych wektorów musi się skończyć po co najwyżej n krokach.)

Wniosek 4.1 *Z każdego układu wektorów* $(b_1, \ldots, b_n)$ *można wyjąć podukład* $(b_{j(1)}, \ldots, b_{j(k)})$, $1 \le j(1) < \cdots < j(k) \le n$ *(*$0 \le k \le n$*) taki, że jest on liniowo niezależny oraz*

$$\mathrm{span}(b_1, \ldots, b_n) = \mathrm{span}(b_{j(1)}, \ldots, b_{j(k)}).$$

4.2.2 Baza i wymiar, twierdzenie Steinitza

Definicja 4.5 *Układ* $\{b_j\}_{j=1}^n$ *nazywamy* bazą *przestrzeni* $\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}} \subseteq \mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ *gdy:*

(i) jest on liniowo niezależny,

(ii) $\mathcal{Y} = \mathrm{span}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Mamy następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie 4.3 *Każda przestrzeń liniowa* $\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}}$ *ma bazę. Ponadto, wszystkie bazy są równoliczne.*

Twierdzenie to prowadzi do następującej definicji.

Definicja 4.6 *Liczbę elementów bazy danej przestrzeni* $\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}}$ *nazywamy jej* wymiarem *i oznaczamy* $\dim(\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}})$.

Dowód twierdzenia 4.3 o istnieniu i równoliczności baz udowodnimy teraz jedynie w przypadku przestrzeni rozpiętych na układach skończonych. Zauważmy najpierw, że z Wniosku 4.1 natychmiast wynika, iż takie przestrzenie mają bazę. Dowód równoliczności baz opiera się na następującym bardzo pożytecznym twierdzeniu.

Twierdzenie 4.4 (Steinitza o wymianie)
Niech

$$\mathrm{span}(b_1, \ldots, b_n) \subseteq \mathrm{span}(c_1, \ldots, c_m) = \mathcal{X},$$

przy czym układ $\{b_j\}_{j=1}^n$ *jest liniowo niezależny. Wtedy* $n \le m$ *oraz* n *elementów układu* $\{c_j\}_{j=1}^n$ *można wymienić na* $\{b_j\}_{j=1}^n$ *otrzymując układ rozpinający* $\mathcal{X}$.

Dowód. (Indukcja względem n.)

Dla $n = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla $n-1$. Wtedy $n - 1 \le m$ oraz

$$\mathcal{X} = \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_{n-1}, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_m).$$

(Zakładamy bez zmniejszenia ogólności, że wymieniliśmy $n-1$ początkowych elementów układu $\{c_j\}_{j=1}^{m}$.) Ponieważ $b_n \in \mathcal{X}$ to można go przedstawić w postaci kombinacji liniowej

$$b_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j * b_j + \sum_{j=n}^{m} \beta_j * c_j.$$

Zauważmy, że istnieje s, $n \leq s \leq m$, taka, że $\beta_s \neq 0$, bo w przeciwnym przypadku b_n byłby liniowo zależny od $b_1, \ldots, b_{n-1}$. Stąd $n \leq m$ oraz

$$c_s = \frac{b_n}{\beta_s} - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\alpha_j}{\beta_s}\right) * b_j - \sum_{s\neq j=n}^{m} \left(\frac{\beta_j}{\beta_s}\right) * c_j,$$

tzn. c_s jest liniową kombinacją wektorów $b_1, \ldots, b_n, c_n, \ldots, c_{s-1}, c_{s+1}, \ldots, c_m$. Wymieniając c_s na b_n dostajemy

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = \mathrm{span}(c_1, \ldots, c_m) &= \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_{n-1}, c_n, \ldots, c_m) \\ &= \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n, c_{n+1}, \ldots, c_m). \end{aligned}$$

To kończy dowód.

Biorąc teraz dwie bazy, $(b_1, \ldots, b_n)$ oraz $(c_1, \ldots, c_m)$, tej samej przestrzeni $\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}}$ i stosując twierdzenie Steinitza otrzymujemy z jednej strony $n \leq m$, a z drugiej $m \leq n$. Stąd $m = n$, czyli bazy są równoliczne.

Z twierdzenia Steinitza można łatwo wywnioskować następujące własności. (Poniżej zakładamy, że $\dim(\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}) < \infty$.)

1. Każdy układ liniowo niezależny w $\mathcal{X}$ można uzupełnić do bazy w $\mathcal{X}$.
2. Jeśli $\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}} \subseteq \mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ to $\dim(\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}}) \leq \dim(\mathcal{X}_{|\mathbf{K}})$.
3. Niech $\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}} \subseteq \mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$. Wtedy

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \iff \dim(\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}}) = \dim(\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}).$$

4.2.3 Przykłady

Podamy teraz kilka przykładów przestrzeni i ich baz.

- $$\mathbf{K}^m_{|\mathbf{K}} = \mathrm{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m),$$

  gdzie $\vec{e}_j = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^T$ jest j-tym wersorem (jedynka na j-tej współrzędnej). Stąd $\dim(\mathbf{K}^m_{|\mathbf{K}}) = m$.

- $$\mathbf{K}^{m,n}_{|\mathbf{K}} = \mathrm{span}(E_{i,j} :\ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n),$$

  gdzie
  $$(E_{i,j})_{p,q} = \begin{cases} 1 & i = p, j = q, \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$
  Stąd $\dim(\mathbf{K}^{m,n}_{|\mathbf{K}}) = m \cdot n$.

- $$\mathbf{C}^{m,n}_{|\mathbf{R}} = \mathrm{span}(E_{i,j}, \imath \cdot E_{i,j} :\ 1 \le i \le m, 1 \le j \le n) \qquad (\imath = \sqrt{-1}).$$

  Stąd $\dim(\mathbf{C}^{m,n}_{|\mathbf{R}}) = 2 \cdot m \cdot n$.

- $$\mathcal{P}^n_{|\mathbf{R}} = \mathrm{span}(1, t, t^2, \ldots, t^{n-1})$$

  i $\dim(\mathcal{P}^n_{|\mathbf{R}}) = n$.

4.3 Sumy i sumy proste

4.3.1 Suma (prosta) dwóch podprzestrzeni

Niech $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{Z}$ będą podprzestrzeniami $\mathcal{X}$. Definiujemy *iloczyn* tych podprzestrzeni jako
$$\mathcal{S} = \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} := \{x \in \mathcal{X} :\ x \in \mathcal{Y} \text{ i } x \in \mathcal{Z}\},$$
oraz *sumę* jako
$$\mathcal{T} = \mathcal{Y} + \mathcal{Z} := \{y + z :\ y \in \mathcal{Y}, z \in \mathcal{Z}\}.$$

Zauważmy, że suma podprzestrzeni nie jest zwykłą sumą teoriomnogościową.

Oczywiście, zarówno iloczyn $\mathcal{S}$ jak i suma $\mathcal{T}$ są podprzestrzeniami $\mathcal{X}$.

Definicja 4.7 *Jeśli iloczyn* $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$ *to sumę* $\mathcal{Y} + \mathcal{Z}$ *nazywamy* sumą prostą *i oznaczamy*

$$\mathcal{T} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}.$$

Podamy teraz kilka własności wymiarów sum i sum prostych.

(W1)

$$0 \leq \dim(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}) \leq \min\left(\dim(\mathcal{Y}), \dim(\mathcal{Z})\right)$$

(W2)

$$\begin{aligned} \max\left(\dim(\mathcal{Y}), \dim(\mathcal{Z})\right) &\leq \dim(\mathcal{Y} + \mathcal{Z}) \\ &\leq \min\left(\dim(\mathcal{X}), \dim(\mathcal{Y}) + \dim(\mathcal{Z})\right) \end{aligned}$$

(W3)

$$\dim(\mathcal{Y} + \mathcal{Z}) = \dim(\mathcal{Y}) + \dim(\mathcal{Z}) - \dim(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z})$$

(W4)

$$\dim(\mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}) = \dim(\mathcal{Y}) + \dim(\mathcal{Z})$$

Własność (W1) jak i lewa strona (W2) wynikają po prostu z zawierania się odpowiednich podprzestrzeni, a prawa strona w (W2) z faktu, że $\mathcal{Y} + \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}$ oraz, że suma teoriomnogościowa baz w $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{Z}$ rozpina $\mathcal{Y} + \mathcal{Z}$.

Ponieważ (W4) wynika bezpośrednio z (W3), dla pełności dowodu wystarczy pokazać (W3). W tym celu bierzemy bazę $(b_1, \ldots, b_u)$ w $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$, a następnie uzupełniamy ją do bazy $(b_1, \ldots, b_u, y_{u+1}, \ldots, y_s)$ w $\mathcal{Y}$ oraz do bazy $(b_1, \ldots, b_u, z_{u+1}, \ldots, z_t)$ w $\mathcal{Z}$. Jasne jest, że

$$\operatorname{span}(y_{u+1}, \ldots, y_s) \cap \operatorname{span}(z_{u+1}, \ldots, z_t) = \{\mathbf{0}\},$$

bo inaczej wspólny element niezerowy byłby w $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$, a wówczas układ $(b_1, \ldots, b_u, y_{u+1}, \ldots, y_s)$ nie byłby liniowo niezależny.

Układ $(b_1, \ldots, b_u, y_{u+1}, \ldots, y_s, z_{u+1}, \ldots, z_t)$ jest więc liniowo niezależny i rozpina $\mathcal{Y} + \mathcal{Z}$, a więc jest też bazą tej przestrzeni. Dlatego

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{Y} + \mathcal{Z}) &= u + (s - u) + (t - u) \;=\; s + t - u \\ &= \dim(\mathcal{Y}) + \dim(\mathcal{Z}) - \dim(\mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}). \end{aligned}$$

4.3.2 Suma (prosta) w ogólnym przypadku

Uogólnimy pojęcia sumy i sumy prostej na dowolną, ale skończoną, liczbę podprzestrzeni. Niech $\mathcal{Y}_j$, $1 \leq j \leq s$, będą podprzestrzeniami $\mathcal{X}$. Sumę tych podprzestrzeni definujemy jako

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2 + \cdots + \mathcal{Y}_s = \sum_{j=1}^{s} \mathcal{Y}_j \\ &:= \{y_1 + \cdots + y_s : \ y_j \in \mathcal{Y}_j, \ 1 \leq j \leq s\}. \end{aligned}$$

Definicja 4.8 *Jeśli dla każdego* t, $1 \leq t \leq s$,

$$\mathcal{Y}_t \cap \left(\sum_{t \neq j=1}^{s} \mathcal{Y}_j \right) = \{\mathbf{0}\}$$

to sumę $\mathcal{Y}_1 + \cdots + \mathcal{Y}_s = \sum_{j=1}^{s} \mathcal{Y}_j$ *nazywamy* suma prostą *i oznaczamy*

$$\mathcal{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{Y}_s = \bigoplus_{j=1}^{s} \mathcal{Y}_j.$$

Twierdzenie 4.5 *Jeśli* $\mathcal{Y} = \oplus_{j=1}^{s} \mathcal{Y}_j$ *to każdy wektor* $y \in \mathcal{Y}$ *ma* jednoznaczne *przedstawienie w postaci*

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_s, \qquad y_j \in \mathcal{Y}_j, \ 1 \leq j \leq s.$$

Dowód. (Indukcja względem s.)

Dla $s = 1$ twierdzenie jest w oczywisty sposób prawdziwe. Załóżmy, że jest ono prawdziwe dla $s - 1$. Niech

$$y = y_1 + \cdots + y_s = y'_1 + \cdots + y'_s.$$

Wtedy

$$\mathcal{Y}_s \ni y_s - y'_s = \sum_{j=1}^{s-1} (y'_j - y_j) \in \mathcal{Y}_1 + \cdots + \mathcal{Y}_{s-1},$$

a ponieważ $\mathcal{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{Y}_{s-1} \oplus \mathcal{Y}_s$ to $y_s = y'_s$ i $y_1 + \cdots + y_{s-1} = y'_1 + \cdots + y'_{s-1}$. Wobec tego, że $\mathcal{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{Y}_{s-1}$, co wynika wprost z definicji sumy prostej, możemy teraz skorzystać z założenia indukcyjnego, aby wywnioskować, że $y_j = y'_j$ dla $1 \leq j \leq s - 1$. To kończy dowód.

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{Y}_s$ to suma teoriomnogościowa baz w $\mathcal{Y}_j$, $1 \le j \le s$, jest bazą $\mathcal{Y}$. W szczególnym przypadku, gdy $(b_1, \ldots, b_n)$ jest bazą $\mathcal{X}$ to

$$\mathcal{X} = \mathrm{span}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{span}(b_n).$$

Ponadto, każdemu wektorowi $x \in \mathcal{X}$ można jednoznacznie przyporządkować współczynniki α_j, $1 \le j \le n$, takie, że

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j * b_j.$$

4.4 Izomorfizm przestrzeni

Definicja 4.9 *Przestrzeń $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ jest* izomorficzna *z $\mathcal{Y}_{|\mathbf{K}}$ (obie przestrzenie nad tym samym ciałem) gdy istnieje wzajemnie jednoznaczne (różnowartościowe i "na") odwzorowanie*

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

zachowujące kombinacje liniowe, tzn. $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$

$$f(\alpha * x_1 + \alpha_2 * x_2) = \alpha_1 * f(x_1) + \alpha_2 * f(x_2).$$

Odwzorowanie f nazywamy izomorfizmem*.*

Zauważmy, że jeśli $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ jest izomorfizmem to $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (bo $f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$). Izomorfizm zachowuje też liniową (nie)zależność wektorów, co wynika z faktu, że warunek $\sum_{j=1}^{s} \alpha_j * f(b_j) = \mathbf{0}$ jest równoważny $f(\sum_{j=1}^{s} \alpha_j * b_j) = \mathbf{0}$, czyli $\sum_{j=1}^{s} \alpha_j * b_j = \mathbf{0}$. Stąd mamy prosty wniosek, że izomorfizm f przeprowadza bazę $(b_1, \ldots, b_n)$ przestrzeni $\mathcal{X}$ na bazę $(f(b_1), \ldots, f(b_n))$ przestrzeni $\mathcal{Y}$.

Ponadto mamy:

(i) każda przestrzeń jest izomorficzna ze sobą,

(ii) jeśli $\mathcal{X}$ jest izomorficzna z $\mathcal{Y}$ to $\mathcal{Y}$ jest izomorficzna z $\mathcal{X}$,

(iii) jeśli $\mathcal{X}$ jest izomorficzna z $\mathcal{Y}$ oraz $\mathcal{Y}$ jest izomorficzna z $\mathcal{Z}$ to $\mathcal{X}$ jest izomorficzna z $\mathcal{Z}$.

Aby pokazać (i) wystarczy zauważyć, że przekształcenie identycznościowe w $\mathcal{X}$ ustala izomorfizm $\mathcal{X}$ z $\mathcal{X}$. Dla (ii) wykażemy, że odwzorowanie odwrotne $f^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ ustala izomorfizm $\mathcal{Y}$ z $\mathcal{X}$. Rzeczywiście, jeśli $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ to istnieją $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ takie, że $y_1 = f(x_1)$ i $y_2 = f(x_2)$. Stąd

$$
\begin{aligned}
&f^{-1}(\alpha_1 * y_1 + \alpha_2 * y_2) \\
&\quad = f^{-1}(\alpha_1 * f(x_1) + \alpha_2 * f(x_2)) = f^{-1}(f(\alpha_1 * x_1 + \alpha_2 * x_2)) \\
&\quad = \alpha_1 * x_1 + \alpha_2 * x_2 = \alpha_1 * f^{-1}(y_1) + \alpha_2 * f^{-1}(y_2).
\end{aligned}
$$

W końcu, aby pokazać (iii) zauważmy, że jeśli f i g są odpowiednio izomorfizmami $\mathcal{X}$ w $\mathcal{Y}$ oraz $\mathcal{Y}$ w $\mathcal{Z}$ to złożenie $h(\cdot) := g(f(\cdot))$ jest izomorfizmem $\mathcal{X}$ w $\mathcal{Z}$. Rzeczywiście,

$$
\begin{aligned}
&h(\alpha_1 * x_1 + \alpha_2 * x_2) \\
&\quad = g(f(\alpha_1 * x_1 + \alpha_2 * x_2)) = g(\alpha_1 * f(x_1) + \alpha_2 * f(x_2)) \\
&\quad = \alpha_1 * g(f(x_1)) + \alpha_2 * g(f(x_2)) = \alpha_1 * h(x_1) + \alpha_2 * h(x_2).
\end{aligned}
$$

Własności (i)-(iii) pokazują, że relacja "bycia przestrzeniami izomorficznymi" jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, a więc jest *relacją równoważności.* Stąd, zbiór wszystkich przestrzeni liniowych nad ustalonym ciałem można podzielić na rozłączne podzbiory będące *klasami abstrakcji* tej relacji. Do tej samej klasy należą przestrzenie wzajemnie izomorficzne.

Wniosek 4.2 *Każda przestrzeń liniowa $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ wymiaru n jest izomorficzna z $\mathbf{K}^n_{|\mathbf{K}}$.*

Rzeczywiście, wybierając dowolną bazę $(b_1, \ldots, b_n)$ w $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ i definiując odwzorowanie $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ jako

$$
f\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j * b_j\Big) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j * \vec{e}_j
$$

(gdzie $\vec{e}_j$ jest j-tym wersorem) otrzymujemy izomorfizm przestrzeni $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}}$ w $\mathbf{K}^n_{|\mathbf{K}}$.

4.5 Warstwy modulo $\mathcal{Y}$

4.5.1 Definicja

Niech $\mathcal{Y}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{X}$ i niech $x_0 \in \mathcal{X}$.

Definicja 4.10 *Zbiór wektorów*

$$W(x_0, \mathcal{Y}) := \{\, x_0 + y : y \in \mathcal{Y} \,\}$$

nazywamy warstwą modulo $\mathcal{Y}$ *przez* x_0 *(albo* hiperpłaszczyzną *równoległą do* $\mathcal{Y}$ *przez punkt* x_0*).*

Zauważmy, że jeśli $x_1 - x_2 \in \mathcal{Y}$ to warstwy $W(x_1, \mathcal{Y})$ i $W(x_2, \mathcal{Y})$ zawierają te same wektory. Rzeczywiście, jeśli $x = x_1 + y \in W(x_1, \mathcal{Y})$ to $x = x_2 + ((x_1 - x_2) + y) \in W(x_2, \mathcal{Y})$. Podobnie, jeśli $x \in W(x_2, \mathcal{Y})$ to $x \in W(x_1, \mathcal{Y})$.

Z drugiej strony, jeśli $x \in W(x_1, \mathcal{Y}) \cap W(x_2, \mathcal{Y})$ to $x = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ dla pewnych $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$. Stąd $x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in \mathcal{Y}$ i w konsekwencji $W(x_1, \mathcal{Y}) = W(x_2, \mathcal{Y})$.

Na podstawie powyższej analizy możemy stwierdzić, że dwie warstwy, $W(x_1, \mathcal{Y})$ i $W(x_2, \mathcal{Y})$, są sobie równe (gdy $x_1 - x_2 \in \mathcal{Y}$) albo rozłączne (gdy $x_1 - x_2 \notin \mathcal{Y}$). Dlatego warstwy $W(x_1, \mathcal{Y})$ i $W(x_2, \mathcal{Y})$ takie, że $x_1 - x_2 \in \mathcal{Y}$ będziemy utożsamiać.

Trywialnymi przykładami warstw są $W(x_0, \mathcal{X}) = \mathcal{X}$ oraz $W(x_0, \{\mathbf{0}\}) = \{x_0\}$.

4.5.2 Przestrzeń warstw

W zbiorze wszystkich warstw modulo $\mathcal{Y}$ ($\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$) wprowadzimy działania dodawania warstw i mnożenia przez skalar $\alpha \in \mathbf{K}$ w następujący sposób:

(i) $W(x_1, \mathcal{Y}) + W(x_2, \mathcal{Y}) := W(x_1 + x_2, \mathcal{Y})$,

(ii) $\alpha * W(x, \mathcal{Y}) := W(\alpha * x, \mathcal{Y})$.

Działania te są dobrze zdefiniowane, bo jeśli

$$W(x_1, \mathcal{Y}) = W(x_1', \mathcal{Y}) \qquad \text{i} \qquad W(x_2, \mathcal{Y}) = W(x_2', \mathcal{Y})$$

to $x_1 - x_1' \in \mathcal{Y}$ i $x_2 - x_2' \in \mathcal{Y}$, a stąd $(x_1 - x_1') + (x_2 - x_2') \in \mathcal{Y}$, czyli $W(x_1 + x_2, \mathcal{Y}) = W(x_1' + x_2', \mathcal{Y})$. Podobnie, jeśli $W(x, \mathcal{Y}) = W(x', \mathcal{Y})$ to $\alpha * x - \alpha * x' = \alpha * (x - x') \in \mathcal{Y}$, czyli $W(\alpha * x, \mathcal{Y}) = W(\alpha * x', \mathcal{Y})$.

Łatwo sprawdzić, że zbiór warstw modulo $\mathcal{Y}$ z powyżej zdefiniowanymi działaniami jest przestrzenią liniową nad $\mathbf{K}$. Aby znaleźć bazę tej przestrzeni, zapiszemy $\mathcal{X}$ jako sumę prostą $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}$ (gdzie $\mathcal{Z}$ jest oczywiście wyznaczona niejednoznacznie) i weźmiemy dowolną bazę $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ w $\mathcal{Z}$ (gdzie

$k = \dim(\mathcal{Z})$). Okazuje się, że przestrzeń warstw jest izomorficzna z $\mathcal{Z}$, a układ

$$(W(z_1, \mathcal{Y}), \dots, W(z_k, \mathcal{Y}))$$

jest jej bazą. Aby się o tym przekonać, wystarczy pokazać, że odwzorowanie

$$f(z) = W(z, \mathcal{Y}), \qquad z \in \mathcal{Z},$$

jest izomorfizmem. Rzeczywiście, z definicji dodawania warstw i mnożenia przez skalar wynika, że f zachowuje kombinacje liniowe. Jest ono również różnowartościowe, bo jeśli $f(z_1) = f(z_2)$ to $z_1 - z_2 \in \mathcal{Y}$, a ponieważ $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{Z}$ tworzą sumę prostą to $z_1 - z_2 = \mathbf{0}$ i $z_1 = z_2$. W końcu, f jest przekształceniem "na", bo dla dowolnej warstwy $W(x, \mathcal{Y})$, $x \in \mathcal{X}$, mamy $W(x, \mathcal{Y}) = f(z)$, gdzie z pochodzi z (jednoznacznego) rozkładu $x = y + z$, $y \in \mathcal{Y}$, $z \in \mathcal{Z}$.

W szczególności pokazaliśmy również, że przestrzeń warstw modulo $\mathcal{Y}$ ma wymiar $\dim(\mathcal{X}) - \dim(\mathcal{Y})$.

Na przykład, jeśli $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ to przestrzeń warstw jest izomorficza z przestrzenią zerową, a jeśli $\mathcal{Y} = \{\mathbf{0}\}$ to jest ona izomorficzna z $\mathcal{X}$.