GAL (I INF)

EGZAMIN (II termin)

3 marca 2012

UWAGI.

(i) Poszczególne zadania należy oddawać na osobnych kartkach podpisanych imieniem i nazwiskiem.
(ii) Każde zadanie warte jest 5 *punktów, niezależnie od stopnia trudności.*

Zadanie 1. Wykaż, że dla dowolnego parametru rzeczywistego $a \neq 0$ równanie

$$z^2 + a\,|z| + a^2 = 0$$

ma dwa różne, wzajemnie sprzężone pierwiastki zespolone.

Zadanie 2. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3,3}.$$

(i) Znajdź rząd, jądro i obraz macierzy oraz ich wymiary,

(ii) Czy przekształcenie $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ zdefiniowane jako

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ -2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

jest izomorfizmem? Jeśli tak to znajdź wzór na izomorfizm odwrotny.

Zadanie 3. Niech $S_n \subset \mathbf{R}^{n,n}$ będzie przestrzenią macierzy symetrycznych. Wyznacz bazę przestrzeni T_n takiej, że $S_n \oplus T_n = \mathbf{R}^{n,n}$. Znajdź wymiar i bazę przestrzeni warstw modulo S_n.

Zadanie 4. Na przestrzeni $\mathbf{R}^5$ dane są funkcjonały

$$s(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad t(\vec{x}) = x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

Znajdź bazę podprzestrzeni $\mathcal{Y} \subset (\mathbf{R}^5)^*$ takiej, że

$$(\mathbf{R}^5)^* = \operatorname{span}(s, t) \oplus \mathcal{Y}.$$

Zadanie 5. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & 13 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & -5 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Stosując *eliminację Gaussa* wyznacz macierze permutacji P, trójkątną dolną L z jedynkami na głównej diagonali oraz trójkątną górną R rozkładu trójkątno-trójkątnego $P * A = L * R$.

Zadanie 6. Macierzą przekształcenia liniowego $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ w bazach odpowiednio $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$ i $[1, t, t^2]$ jest

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znajdź, jeśli istnieje, bazę $\mathbb{B}$ przestrzeni $\mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ taką, że macierzą przekształcenia f w bazach odpowiednio $[\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2]$ oraz $\mathbb{B}$ jest identyczność I_3.

Zadanie 7. Oblicz wyznacznik

$$\det{}_{\mathrm{n}} \left(\begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix} \right)$$

dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Zadanie 8. Wykaż, że

$$(p, q) = 2p(-1)q(-1) + 2p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(0) + p(0)q(-1) + p(-1)q(1) + p(1)q(-1)$$

jest iloczynem skalarnym w przestrzni $\mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ wielomianów rzeczywistych stopnia mniejszego niż 3. Następnie znajdź wielomian będący rzutem prostopadłym (względem danego iloczynu skalarnego) wielomianu $1 + t + t^2$ na podprzestrzeń

$$\mathcal{Y} = \{ p \in \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}} : \; p(-1) + p(1) = 2p(0) \}.$$