GAL (I INF)

Egzamin (I termin)
2-02-2011

PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1.
Obliczając wyznacznik podanej macierzy w standardowy sposób otrzymujemy

$$\varepsilon^6 - 2\varepsilon^3 + 1 = (z-1)^2 \qquad \text{gdzie} \quad z = \varepsilon^3.$$

Musimy więc rozwiązać równanie $(z-1)^2 = -1$. Ponieważ $-1 = \imath^2$ to $z - 1 = \pm\imath$, czyli $z = 1 \pm \imath = 2^{-1/2}(\cos(2k\pi \pm \pi/4) + \imath \sin(2k\pi \pm \pi/4))$. Dostajemy więc 6 różnych rozwiązań $\varepsilon = 2^{-1/6}(\cos(2k/3 \pm 1/12)\pi) + \imath \sin(2k/3 \pm 1/12)\pi)$, $k = 0, 1, 2$, albo w innym zapisie

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/6} \left(\cos\left(\frac{(8k \pm 1)\pi}{12}\right) + \imath \sin\left(\frac{(8k \pm 1)\pi}{12}\right)\right) \qquad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3.$$

Zadanie 2.
Niech $\vec{v}_1 = [-1, 1, -2, 0]^T$, $\vec{v}_2 = [4, -1, 2, 0]^T$, $\vec{v}_3 = [-2, 2, -1, 0]^T$, $\vec{u} = [1, 1, 1, 1]^T$. Wówczas

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_2, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{v}_2 + \frac{2}{3}\vec{v}_3, \quad \vec{e}_3 = -\frac{2}{3}\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_3.$$

Ponieważ $A * \vec{v}_i = 3\vec{u}$ dla $i = 1, 2, 3$, więc $A * \vec{e}_1 = 2\vec{u}$, $A * \vec{e}_2 = 3\vec{u}$, $A * \vec{e}_3 = \vec{u}$, czyli macierz A jest postaci

$$A = [2\vec{u}, 3\vec{u}, \vec{u}, \vec{z}],$$

gdzie $\vec{z} \in \mathbf{R}^4$ jest dowolnym wektorem. Łatwo też sprawdzić, że każda taka macierz spełnia warunki podane w treści zadania. Wobec tego

$$\mathrm{rz}(A) = \dim(\mathrm{span}(\vec{u}, \vec{z})) \in \{1, 2\}.$$

Jeżeli $\vec{x} = [1, -1, 1, 0]^T$ to $\vec{x} \in \mathcal{N}(A)$ dla każdej takiej macierzy A. Jeżeli $\vec{y} = \vec{u}$ to $\vec{y} \in \mathcal{R}(A)$ dla każdej takiej macierzy A.

Zadanie 3.
Wykonując operacje elementarne na wierszach (eliminacja Gaussa), sprowadzamy układ wyjściowy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1/2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

do postaci

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 & 7/2 \end{array}\right].$$

(Wykonane operacje to: pomnożenie drugiego wiersza przez -2, dodanie go do pierwszego wiersza, zamiana wierszy miejscami, podzielenie wiersza drugiego przez 2.) Stąd otrzymujemy

$$\begin{cases} x_1 = -2 + 2x_3 \\ x_2 = 7/2 - (5/2)x_3 \end{cases}$$

Ogólne rozwiązanie układu jest zatem postaci

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2x_3 \\ 7/2-(5/2)x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -5/2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3,$$

a stąd $\vec{x}_0 = [-2, 7/2, 0]^T$ oraz $\mathcal{Y}_0 = \mathrm{span}([2, -5/2, 1]^T)$.

Zauważmy, że $\mathcal{Y}_1 = \mathrm{span}([4, -5, 2]^T) = \mathrm{span}([2, -5/2, 1]^T) = \mathcal{Y}_0$. Teraz trzeba tylko sprawdzić, czy $\vec{x}_1$ może być rozwiązaniem szczególnym układu. Podstawiamy $\vec{x}_1$ do układu i otrzymujemy

$$\begin{cases} \lambda + 5 = 5 \\ -\lambda/2 + 1 = 1 \end{cases}$$

Zatem ostatecznie, tylko dla $\lambda = 0$ mamy $W(\vec{x}_0, \mathcal{Y}_0) = W(\vec{x}_1, \mathcal{Y}_1)$.

Zadanie 4.

Funkcjonały s_1, s_2, s_3 tworzą bazę przestrzeni $(\mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}})^*$. (Jest to baza sprzężona do bazy $\mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ złożonej z wielomianów Lagrange odpowiadającej punktom $1, 2, 3$.) Z warunków zadania mamy

$$f(s_1) = 1+t, \quad f(s_2) = 1-t, \quad f(s_3) = 2.$$

Ponieważ (s_1, s_2, s_3) jest bazą, więc obraz $\mathrm{im}(f) = \mathrm{span}(f(s_1), f(s_2), f(s_3)) = \mathrm{span}(1, t)$. Zatem bazą obrazu f są np. wielomiany 1 i t. Wobec tego $\dim(\ker f) = 3 - \dim(\mathrm{im} f) = 1$. Skoro $f(s_3 - s_1 - s_2) = 0$, to bazą jądra f jest funkcjonał $s = s_3 - s_1 - s_2$, tzn. $s(p) = p(3) - p(1) - p(2)$.

Zadanie 5.

Szukamy rozkładu trójkątno-trójkątnego macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & 3 \\ -2 & -4 & 7 & 18 \\ 1 & 2 & 10 & -6 \\ -3 & -5 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ należy rozwiązać też układ równań $A * \vec{x} = \vec{b}$ dla $\vec{b} = [a, a, a, a, a]^T$, wygodniej będzie przekształcać od razu macierz rozszerzoną układu:

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & a \\ 2 & 4 & -5 & 3 & a \\ -2 & -4 & 7 & 18 & a \\ 1 & 2 & 10 & -6 & a \\ -3 & -5 & 8 & 8 & a \end{array}\right].$$

Wykonując operacje na wierszach: $w_2 := w_2 - 2w_1$, $w_3 := w_3 + 2w_1$, $w_4 := w_4 - w_1$, $w_5 := w_5 + 3w_1$ otrzymujemy macierz

$$[A_1|\vec{b}_1] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & a \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -a \\ 0 & 0 & 3 & 24 & 3a \\ 0 & 0 & 12 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 4a \end{array}\right]$$

oraz wektor eliminacji $\vec{l_1} = [0, 2, -2, 1, -3]^T$. Zamieniamy teraz wiersz drugi z piątym, otrzymując macierz

$$[A_1^{(1)}|\vec{b}_1^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 4a \\ 0 & 0 & 3 & 24 & 3a \\ 0 & 0 & 12 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -a \end{array}\right]$$

oraz wektor eliminacji $\vec{l}_1^{(1)} = [0, -3, -2, 1, 2]^T$. Ponieważ w drugiej kolumnie pod główną diagonalą są zera, mamy od razu $\vec{l_2} = [0, 0, 0, 0, 0]^T$ oraz $[A_2|\vec{b_2}] = [A_1^{(1)}|\vec{b}_1^{(1)}]$. Aby uniknąć w wektorze eliminacji ułamków, zamieniamy teraz wiersz trzeci z piątym, otrzymując macierz

$$[A_2^{(1)}|\vec{b}_2^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 4a \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -a \\ 0 & 0 & 12 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 24 & 3a \end{array}\right].$$

Poprzednie wektory eliminacji (w zasadzie tylko pierwszy) również ulegają zmianie (permutacji $T_{3,5}$): $\vec{l}_1^{(2)} = [0, -3, 2, 1, -2]^T$. Teraz wykonujemy eliminację: $w_4 := w_4 + 12w_3$, $w_5 := w_5 + 3w_3$ dostając macierz

$$[A_3|\vec{b_3}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 4a \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -a \\ 0 & 0 & 0 & -45 & -12a \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \end{array}\right]$$

i wektor eliminacji $\vec{l_3} = [0, 0, 0, -12, -3]^T$. Aby ponownie uniknąć ułamków, zamieniamy wiersze czwarty z piątym, otrzymując macierz

$$[A_3^{(1)}|\vec{b}_3^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 4a \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 & -12a \end{array}\right]$$

i wektor eliminacji $\vec{l}_3^{(1)} = [0, 0, 0, -3, -12]^T$, ponownie zmianie ulegają też poprzednie wektory eliminacji (w zasadzie tylko pierwszy): $\vec{l}_1^{(3)} = [0, -3, 2, -2, 1]^T$. Na koniec wykonujemy operację: $w_5 := w_5 + 3w_4$, otrzymując

$$[A_4|\vec{b_4}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 4a \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12a \end{array}\right]$$

i wektor eliminacji $\vec{l_4} = [0, 0, 0, 0, -3]^T$.

Ostatecznie otrzymujemy macierze

$$L = I_5 + [\vec{l}_1^{(3)}, \vec{l_2}, \vec{l}_3^{(1)}, \vec{l_4}, \vec{0}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -12 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad R = A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz permutacji wierszy otrzymujemy jako iloczyn

$$P = T_{4,5} * T_{3,5} * T_{2,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Istotnie, łatwo sprawdzamy, że $P * A = L * R$.

Teraz na mocy tw. Kroneckera-Capelliego widzimy, że dla $a \neq 0$ układ jest sprzeczny. Jeżeli $a = 0$, to z macierzy A_4 odczytujemy, że układ posiada jedno rozwiązanie $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [0, 0, 0, 0]^T$.

Zadanie 6.

Macierz przekształcenia g podana w zadaniu dana jest wzorem $G = \mathbb{B}^{-1} \cdot g \cdot \mathbb{A}$. Niech $M = \mathbb{E}^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{B}$ będzie macierzą przekształcenia f w bazach standardowych $\mathbb{B}$ przestrzeni $\mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ i $\mathbb{E} = [1, t]$ przestrzeni $\mathcal{P}^2_{|\mathbf{R}}$. Mamy więc

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Niech $\mathbb{A} = \mathbb{E} * C$, gdzie

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

jest macierzą zmiany bazy. Wówczas dla macierzy H będącej poszukiwaną macierzą przekształcenia h mamy

$$H = \mathbb{B}^{-1} \cdot g \circ f \cdot \mathbb{B} = (\mathbb{B}^{-1} \cdot g \cdot \mathbb{A}) * (\mathbb{A}^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{B}) = G * ((\mathbb{E} * C)^{-1} \cdot f \cdot \mathbb{B}) = G * C^{-1} * M.$$

Odwracając macierz C otrzymujemy

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i ostatecznie

$$H = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7.

Zauważmy najpierw, że $(\det(A))^2 = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A^T * A)$. Jeśli teraz wektor $\vec{a}$ jest prostopadły do $\mathcal{Y}$, tzn. $\vec{a}_{\mathcal{Y}} = \vec{0}$, to $A^T * A$ jest kwadratową macierzą diagonalną z jedynkami na głównej przekątnej poza wyrazem ostatnim, który wynosi $\vec{a}^T * \vec{a} = \|\vec{a}\|_2^2$. Stąd

$$|\det(A)| = \big(\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1} \cdot \|\vec{a}\|_2^2\big)^{1/2} = \|\vec{a}\|_2 = \|\vec{a} - \vec{a}_{\mathcal{Y}}\|_2.$$

Jeśli zaś $\vec{a}$ nie jest prostopadły do $\mathcal{Y}$ to

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det([\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_{n-1}, (\vec{a} - \vec{a}_{\mathcal{Y}}) + \vec{a}_{\mathcal{Y}}]) \\ &= \det([\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_{n-1}, \vec{a} - \vec{a}_{\mathcal{Y}}]) + \det([\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_{n-1}, \vec{a}_{\mathcal{Y}}]). \end{aligned}$$

Ponieważ rzut $\vec{a}_{\mathcal{Y}}$ jest liniową kombinacją $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_{n-1}$ to drugi składnik ostatniej sumy wynosi zero. Z kolei pierwszy składnik wynosi $\|\vec{a} - \vec{a}_{\mathcal{Y}}\|_2$, bowiem $\vec{a} - \vec{a}_{\mathcal{Y}}$ jest prostopadły do $\mathcal{Y}$. Ostatecznie mamy $\det(A) = \|\vec{a} - \vec{a}_{\mathcal{Y}}\|_2$, czyli tezę zadania.

Zadanie 8.
Niech $\mathbb{P} = [1, t, t^2]$ będzie bazą potęgową przestrzeni wielomianów $\mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$. Wtedy dla

$$p(t) = (\mathbb{P} * \vec{a})(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \qquad \vec{a} = [a_0, a_1, a_2]^T$$

mamy

$$\|p\|^2 = 6a_0^2 + 2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_0a_1 + 6a_0a_2 = \vec{a}^T * A * \vec{a},$$

gdzie

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^3 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

jest macierzą formy kwadratowej $h(p) = \|p\|^2$ w bazie $\mathbb{P}$ i jednocześnie macierzą odpowiedniej formy dwuliniowej. Ponieważ, zgodnie z kryterium Sylwester'a, macierz ta jest dodatnio określona, forma jest też dodatnio określona i odpowiedni iloczyn skalarny wynosi

$$(p, q) = \vec{a}^T * A * \vec{b}, \qquad p = \mathbb{P} * \vec{a},\ q = \mathbb{P} * \vec{b}.$$

Rzut r wielomianu t^2 na podprzestrzeń $\mathcal{Y} = \operatorname{span}(1, t)$ wyraża się wzorem $r = \mathbb{P} * \vec{c}$ gdzie

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,t) \\ (t,1) & (t,t) \end{bmatrix} * \vec{c} = \begin{bmatrix} (1,t^2) \\ (t,t^2) \end{bmatrix}.$$

Współczynniki macierzy i prawej strony tego układu łatwo odczytać z macierzy A. Wobec tego, że $a_{i,j} = (t^{i-1}, t^{j-1})$, mamy

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} * \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $\vec{c} = [6/11, -3/11]$ i ostatecznie szukany rzut wynosi $r(t) = 3(2-t)/11$.