# GAL (I INF)

**EGZAMIN** (I termin)
2 lutego 2012

UWAGI.
*(i) Poszczególne zadania należy oddawać na osobnych kartkach podpisanych imieniem i nazwiskiem.*
*(ii) Każde zadanie warte jest* 5 *punktów, niezależnie od stopnia trudności.*

**Zadanie 1.** Znajdź wszystkie liczby zespolone $\varepsilon$, dla których wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{bmatrix}$$

wynosi $-1$.

**Zadanie 2.** Znajdź wszystkie macierze $A \in \mathbf{R}^{4,4}$ spełniające zależności

$$A * (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3) = A * (4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = A * (-2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = 3 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4).$$

Jaki może być rząd $A$? Czy istnieją wektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^4 \setminus \{\vec{0}\}$ takie, że DLA WSZYSTKICH TAKICH $A$ mamy $\vec{x} \in \mathcal{N}(A)$ i $\vec{y} \in \mathcal{R}(A)$?

**Zadanie 3.** Przedstaw ogólne rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

jako warstwę $W(\vec{x}_0, \mathcal{Y}_0)$ w przestrzeni $\mathbf{R}^3$. Następnie rozstrzygnij czy istnieje parametr rzeczywisty $\lambda$, dla którego $W(\vec{x}_0, \mathcal{Y}_0) = W(\vec{x}_1, \mathcal{Y}_1)$, gdzie $\vec{x}_1 = [\lambda, 1, 1]^T$ oraz $\mathcal{Y}_1 = \operatorname{span}\big([4, -5, 2]^T\big)$.

**Zadanie 4.** Dane są funkcjonały liniowe $s_1, s_2, s_3 \in (\mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}})^*$,

$$s_1(p) = p(1), \quad s_2(p) = p(2), \quad s_3(p) = p(3), \qquad p \in \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}.$$

Przekształcenie liniowe $f : (\mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}})^* \mapsto \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ spełnia

$$f(s_1) = 1 + t, \quad f(s_2) = 1 - t, \quad f(s_3) = f(s_1) + f(s_2).$$

Wyznacz bazy obrazu i jądra przekształcenia $f$.

**Zadanie 5.** Niech $A \in \mathbf{R}^{5,4}$ będzie macierzą układu równań liniowych

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & a \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & = & a \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 18x_4 & = & a \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 10x_3 & - & 6x_4 & = & a \\ -3x_1 & - & 5x_2 & + & 8x_3 & + & 8x_4 & = & a \end{array}\right.$$

Znajdź, jeśli istnieją, macierze permutacji $P \in \mathbf{R}^{5,5}$, trójkątną dolną $L \in \mathbf{R}^{5,5}$ z jedynkami na głównej przekątnej oraz trójkątną górną $R \in \mathbf{R}^{5,4}$, WSZYSTKIE O WSPÓŁCZYNNIKACH CAŁKOWITYCH, takie że $P * A = L * R$. Następnie wyznacz wszystkie rozwiązania podanego układu w zależności od parametru $a \in \mathbf{R}$.

**Zadanie 6.** Niech $f : \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}} \mapsto \mathcal{P}^2_{|\mathbf{R}}$ będzie przekształceniem liniowym określonym wzorem

$$(f(p))(t) = tp(0) + (1-t)p(1).$$

Niech dalej $g : \mathcal{P}^2_{|\mathbf{R}} \mapsto \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ będzie innym przekształceniem liniowym, którego macierz w bazach $\mathbb{A} = [t-1, t+1]$ przestrzeni $\mathcal{P}^2_{|\mathbf{R}}$ i $\mathbb{B} = [1, t, t^2]$ przestrzeni $\mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ wynosi

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz złożenia $h = g \circ f$ w bazie $\mathbb{B}$ (wyjściowej i docelowej).

**Zadanie 7.** Niech $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}} = \mathbf{R}^n_{|\mathbf{R}}$ będzie przestrzenią Euklidesową ze zwykłym iloczynem skalarnym $(\vec{x}, \vec{y})_2 = \vec{x}^T * \vec{y}$ i odpowiadającą mu normą $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\vec{x}^T * \vec{x}}$. Rozpatrzmy macierz

$$A = [\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_{n-1}, \vec{a}],$$

w której wektory $\vec{q}_j \in \mathbf{R}^n$, $1 \le j \le n-1$, tworzą UKŁAD ORTONORMALNY. Wykaż, że

$$|\mathrm{det}_n(A)| = \|\vec{a} - \vec{a}_{\mathcal{Y}}\|_2,$$

gdzie $\vec{a}_{\mathcal{Y}}$ jest rzutem ortogonalnym wektora $\vec{a}$ na podprzestrzeń $\mathcal{Y} = \mathrm{span}(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_{n-1})$.
*Wskazówka.* Rozpatrz najpierw szczególny przypadek, gdy $\vec{a}$ jest ortogonalny do $\mathcal{Y}$. W ogólnym przypadku, skorzystaj z rozkładu $\vec{a} = (\vec{a} - \vec{a}_{\mathcal{Y}}) + \vec{a}_{\mathcal{Y}}$.

**Zadanie 8.** Wykaż, że

$$\|p\| = \sqrt{p^2(-1) + (p(0) + p(1))^2 + p^2(0)}$$

jest normą w przestrzeni wielomianów $\mathcal{X}_{|\mathbf{K}} = \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ generowaną przez pewien iloczyn skalarny w tej przestrzeni. Następnie znajdź rzut prostopadły wielomianu $t^2$ na podprzestrzeń $\mathcal{Y} = \mathrm{span}(1, t)$ względem tego iloczynu skalarnego.