Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Michał Łasica
Nr albumu: 262457

Unitarne formy reprezentacji nieprzywiedlnych kwantowej grupy $SU(2)$

Praca licencjacka
na kierunku FIZYKA w ramach MISMaP

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Piotra Sołtana
Katedra Metod Matematycznych Fizyki UW

Warszawa, sierpień 2010

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora pracy

Streszczenie

W pracy streszczono najważniejsze fakty dotyczące teorii reprezentacji grupy $SU(2)$ i kwantowej grupy $SU(2)$ oraz podano unitarne formy niektórych reprezentacji nieprzywiedlnych $S_qU(2)$, w tym trójwymiarowej.

Słowa kluczowe

grupy kwantowe, $SU(2)$, reprezentacje unitarne

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13.2 Fizyka

Tytuł pracy w języku angielskim

Unitary forms of irreducible representations of quantum $SU(2)$ group

Spis treści

1 Wstęp **3**
1.1 Grupy i ich reprezentacje w fizyce . . . 3
1.2 Od grup do grup kwantowych . . . 4

2 Grupa $SU(2)$ i jej reprezentacje **5**
2.1 Definicja grupy $SU(2)$ . . . 5
2.2 Miara Haara na $SU(2)$ . . . 5
2.3 Reprezentacje $SU(2)$ . . . 6

3 Kwantowa grupa $SU(2)$ **7**
3.1 Definicja $S_qU(2)$ . . . 7
3.2 Miara Haara na $S_qU(2)$ . . . 8

4 Reprezentacje kwantowej grupy $SU(2)$ **9**
4.1 Standardowe formy reprezentacji . . . 9
4.2 Formy unitarne . . . 10

Bibliografia **11**

Rozdział 1

Wstęp

1.1. Grupy i ich reprezentacje w fizyce

W opisie rzeczywistości ogromne znaczenie ma symetria. Do matematycznego ujęcia symetrii obiektów używa się pojęcia działania grupy. W problemach fizycznych najważniejsze sa symetrie ciągłe, którym odpowiadają ciągłe działania grup Liego, czyli grup będących jednocześnie gładkimi rozmaitościami różniczkowymi. Podstawowym przykładem tego typu jest symetria obrotowa zachowywana przez działanie grupy $SO(3)$ obrotów przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$. Jest ono przykładem działania poprzez odwzorowania liniowe. Działania takie nazywa się reprezentacjami (liniowymi).

Definicja 1.1 *Reprezentacją (liniową, silnie ciągłą) grupy Liego G na przestrzeni Hilberta H nazywamy homomorfizm $\rho \colon G \to GL(H)$ taki, że dla każdego $x \in H$ odwzorowanie*

$$G \ni g \mapsto \rho(g)x \in H$$

jest ciągłe.

Działanie $SO(3)$ na $\mathbb{R}^3$ jest co więcej przykładem reprezentacji unitarnej.

Definicja 1.2 *Reprezentację ρ grupy G na przestrzeni H nazywamy unitarną, jeśli*

$$\forall_{g \in G} \quad \rho(g)^* \rho(g) = 1$$

Fizyczne własności przestrzeni opisuje się za pomocą funkcji na niej. Jeśli ρ jest reprezentacją grupy Liego G na przestrzeni liniowej V, to wzór $f \mapsto f(\rho(g)^{-1} \cdot)$ zadaje reprezentację G na przestrzeni funkcji $L_2(V)$. Jeśli ρ jest reprezentacją unitarną, to również powyższa reprezentacja jest unitarna. Gdy G jest zwarta jako przestrzeń topologiczna, można pokazać, że każda jej reprezentacja unitarna rozkłada się na sumę prostą skończenie wymiarowych reprezentacji nieprzywiedlnych (tzn. nieposiadających właściwych przestrzeni własnych) [Ser].

W przypadku działania $SO(3)$ na $\mathbb{R}^3$ rozkład ten odpowiada rozkładowi $L_2(S^2)$ na przestrzenie harmonik sferycznych H_l, $l = 0, 1, 2\ldots$ Mają one znaczenie np. w mechanice kwantowej jako składowe kątowe funkcji falowych cząstek o ustalonym momencie pędu. Same podreprezentacje nieprzywiedlne opisują transformacje elementów H_l przy obrotach.

W teorii kwantów znajduje też odzwierciedlenie ważny fakt, że $SO(3)$ jest grupą ilorazową (o indeksie 2) większej grupy $SU(2)$ [Kos]. Skończenie wymiarowe unitarne reprezentacje nieprzywiedlne $SU(2)$ opisują transformacje przy obrotach stanu cząstki o spinie $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ Grupę $SU(2)$ omówię szerzej w rozdziale 2.

1.2. Od grup do grup kwantowych

Postęp fizyki polega na wymianie teorii które opisują świat w przybliżony sposób na teorie coraz dokładniejsze. Proces ten ma swój odpowiednik na poziomie teorii grup – grupy opisujące symetrię nowych teorii są *deformacjami* "starych" grup. Podstawowym przykładem takiej wymiany jest jest przejście od grupy Galileusza opisującej symetrie klasycznej czasoprzestrzeni do grupy Poincarégo opisującej symetrie czasoprzestrzeni szczególnej teorii względności.

W przypadku półprostych grup Liego, których przykładem jest $SU(2)$, nie istnieją nietrywialne deformacje tego typu. Można jednak skonstruować rodzinę obiektów zależnych w sposób ciągły od indeksu $q \in [-1, 1]\backslash\{0\}$ nie będących grupami, ale stanowiących deformację $SU(2)$. Obiekty te, wprowadzone przez S. L. Woronowicza w pracach [CMP] oraz [SqU2] i zwane kwantowymi grupami $SU(2)$ ($S_qU(2)$) omówię w rozdziale 3. W rozdziale 4. przytoczę definicje i twierdzenia dotyczące reprezentacji $S_qU(2)$ oraz przedstawię obliczone reprezentacje i ich formy unitarne. W szczególności podam unitarną formę trójwymiarowej reprezentacji nieprzywiedlnej $S_qU(2)$ definiującej kwantową grupę $SO(3)$.

Rozdział 2

Grupa $SU(2)$ i jej reprezentacje

2.1. Definicja grupy $SU(2)$

Rozpocznę od przypomnienia definicji grupy $SU(2)$.

Definicja 2.1 *Grupą $SU(2)$ nazywamy zbiór izometrii liniowych $\mathbb{C}^2$ o wyznaczniku 1 z działaniem składania.*

Łatwo zauważyć, że tak zdefiniowany obiekt istotnie jest grupą. Z definicji tej wynika również, że $SU(2)$ działa w naturalny sposób na $\mathbb{C}^2$. Działanie to nazywa się reprezentacją definiujacą $SU(2)$.

W świetle dalszych rozważań istotny jest następujący dość podstawowy fakt [Kos]:

Stwierdzenie 2.1 *Grupa $SU(2)$ jest izomorficzna z podzbiorem*

$$\left\{\begin{bmatrix}\alpha & -\overline{\beta}\\ \beta & \overline{\alpha}\end{bmatrix} : |\alpha|^2+|\beta|^2=1\right\} = \left\{\begin{bmatrix}\cos\vartheta e^{i\phi} & -\sin\vartheta e^{-i\psi}\\ \sin\vartheta e^{i\psi} & \cos\vartheta e^{-i\phi}\end{bmatrix} : \begin{matrix}0\leq & \vartheta & <\frac{\pi}{2}\\ 0\leq & \phi,\psi & <2\pi\end{matrix}\right\}$$

macierzy 2×2 o współczynnikach zespolonych z działaniem mnożenia macierzy.

2.2. Miara Haara na $SU(2)$

Korzystając z macierzowego przedstawienia grupy $SU(2)$ nietrudno zaobserwować, że jest ona zwartą grupą Liego i jako taka posiada lewo- i prawoniezmienniczą miarę Haara [Ser].

Twierdzenie 2.1 *Przy oznaczeniach ze stw. 2.1, wzór*

$$d\mu(\theta,\phi,\psi)=\frac{1}{4\pi^2}\sin 2\vartheta d\vartheta d\phi d\psi$$

zadaje miarę Haara na $SU(2)$, tj. dla każdego $x\in SU(2)$ i każdej borelowsko mierzalnej funkcji f na $SU(2)$:

$$\int f(xy)d\mu(y)=\int f(y)d\mu(y)=\int f(yx)d\mu(y) \tag{2.1}$$

Przyjmując odpowiednią definicję splotu funkcji z miarą $*$ można warunek 2.1 zapisać w równoważnej postaci

$$f*\mu=\int fd\mu\cdot\mathbf{1}_G=\mu*f \tag{2.2}$$

Z istnienia miary Haara wynika unitaryzowalność skończenie wymiarowych reprezentacji $SU(2)$ [Ser].

2.3. Reprezentacje $SU(2)$

Jak już zauważyliśmy, $SU(2)$ jest grupą zwartą, zatem każda jej reprezentacja unitarna rozkłada się na sumę prostą skończenie wymiarowych reprezentacji nieprzywiedlnych, charakteryzowanych przez poniższe twierdzenie [Kos]:

Twierdzenie 2.2 *Niech $\pi\colon SU(2) \to GL(\mathbb{C}^2)$ będzie reprezentacją definiującą $SU(2)$. Dla każdego $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ niech π^s oznacza $2s+1$-szą tensorową potęgę symetryczną π. Wówczas każda π^s jest nieprzywiedlna i każda nieprzywiedlna reprezentacja $SU(2)$ jest równoważna jednej z π^s.*

Zachodzi również następujący fakt dotyczący iloczynów tensorowych reprezentacji nieprzywiedlnych $SU(2)$:

Twierdzenie 2.3 *Niech $r, s \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\}$. Wówczas reprezentacja $\pi^r \otimes \pi^s$ jest równoważna sumie prostej $\pi^{|s-r|} \oplus \pi^{|s-r|+1} \oplus \ldots \oplus \pi^{s+r}$.*

Twierdzenie to ma duże znaczenie w fizyce – w formalizmie mechaniki kwantowej iloczyn tensorowy $\pi^r \otimes \pi^s$ opisuje układ składający się z cząstki o spinie r i cząstki o spinie s.

W przypadku skończenie wymiarowym pojęcie reprezentacji daje się zdefiniować prościej niż w def. 1.1:

Stwierdzenie 2.2 *Odwzorowanie $\rho\colon G \to M_n(\mathbb{C})$ jest reprezentacją grupy Liego G wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{g,h \in G} \quad \rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$$

oraz ρ jest odwzorowaniem ciągłym.

Przestrzeń funkcji ciągłych $C(G, M_n(\mathbb{C}))$ jest naturalnie izomorficzna przestrzeni $M_n(C(G))$, oczywista jest zatem następująca uwaga:

Stwierdzenie 2.3 *Każdej reprezentacji ρ grupy G na $\mathbb{C}^n$ odpowiada jednoznacznie wyznaczona macierz $[\rho_{ij}] \in M_n(C(G))$ spełniająca warunki*

$$\rho_{ij}(gh) = \sum_{k=1}^{n} \rho_{ik}(g)\rho_{kj}(h) \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_{ik}(g^{-1})\rho_{kj}(h) = \delta_{ij} \tag{2.4}$$

Stwierdzenie to jest punktem wyjścia do definicji zwartej grupy kwantowej i jej reprezentacji.

Rozdział 3

Kwantowa grupa $SU(2)$

3.1. Definicja $S_qU(2)$

Zacytuję definicję zwartej grupy kwantowej pochodzącą z [CMP].

Definicja 3.1 *Niech A będzie C^*-algebrą z jednością I, niech $u \in M_n(A)$ oraz niech $\mathcal{A}$ będzie *-podalgebrą A generowaną przez elementy macierzowe u. Mówimy, że (A, u) jest zwartą grupą kwantową, jeśli spełnione są następujące warunki:*

1. *$\mathcal{A}$ jest gęsta w A.*

2. *Istnieje C^*-homomorfizm $\Delta\colon A \to A \otimes A$ spełniający warunek*

$$\Delta(u_{kl}) = \sum_{r=1}^{n} u_{kr} \otimes u_{rl} \tag{3.1}$$

   dla $1 \leq k, l \leq n$.

3. *Istnieje liniowe antymultyplikatywne odwzorowanie $\kappa\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ spełniające warunki:*

$$\forall_{a\in\mathcal{A}} \quad \kappa(\kappa(a^*)^*) = a$$

   oraz

$$\sum_{r=1}^{n} \kappa(u_{kr})u_{rl} = \delta_{kl} I = \sum_{r=1}^{n} u_{kr}\kappa(u_{rl}) \tag{3.2}$$

   dla $1 \leq k, l \leq n$.

C^*-algebra A jest tu odpowiednikiem algebry funkcji ciągłych na grupie, macierz u odpowiada reprezentacji definiującej, zaś podalgebra $\mathcal{A}$ pelni rolę algebry funkcji gładkich. Równania 3.1 i 3.2 odpowiadają równaniom 2.3 i 2.4 wynikającym z definicji reprezentacji.

Wprowadzając symbol $\oslash$ na oznaczenie zwykłego iloczynu macierzy, w którym zwykłe mnożenie elementów macierzowych zostało zastapione przez iloczyn tensorowy, można te warunki zapisać w postaci

$$u \oslash u = (id \otimes \Delta)u$$

$$(id \otimes \kappa)u = u^{-1}$$

Definicja kwantowej grupy $SU(2)$ jest zawarta w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 3.1 *Niech A będzie C^*-algebrą z jednością I generowaną przez dwa elementy α, β spełniające następujące relacje:*

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= q\beta\alpha && (3.3) \\ \beta\beta^* &= \beta^*\beta && (3.4) \\ \alpha\beta^* &= q\beta^*\alpha && (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^* + q^2\beta\beta^* &= I && (3.6) \\ \alpha^*\alpha + \beta^*\beta &= I && (3.7) \end{aligned}$$

(gdzie $q \in [-1, 1]\backslash\{0\}$) i niech

$$u = \begin{bmatrix} \alpha & -q\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Wówczas $S_qU(2) = (A, u)$ jest zwartą grupą kwantową.

W pełni formalne sformułowanie powyższego twierdzenia i jego dowód znajdują się w [SqU2]. Gdy $q = 1$, równania 3.3 - 3.5 przechodza w trywialne relacje komutacyjne algebry funkcji, a równania 3.6 - 3.7 i 3.8 – w warunki charakteryzujące $SU(2)$ zgodnie ze stwierdzeniem 2.1. Zatem $S_1U(2) = (C(SU(2), \pi)$, gdzie π jest reprezentacją definiującą $SU(2)$.

3.2. Miara Haara na $S_qU(2)$

W klasycznej teorii reprezentacji grup wielkie znaczenie ma miara Haara. W teorii reprezentacji grup kwantowych pokazuje się istnienie funkcjonału na algebrze A pełniącego rolę analogiczną do całki względem miary Haara określonej na $C(G)$ [CMP]:

Twierdzenie 3.2 *Niech (A, u) będzie zwartą grupą kwantową. Wówczas istnieje funkcjonał dodatni $h \in A^*$ o normie 1 taki, że*

$$(id \otimes h)\Delta(a) = h(a)I = (h \otimes id)\Delta(a) \tag{3.9}$$

dla każdego $a \in A$. Funkcjonał ten nazywa się miarą Haara na (A, u).

Gdy $A = C(G)$, A^* jest przestrzenią regularnych miar borelowskich na G, wówczas

$$(id \otimes h)\Delta(a) = h * a$$

gdzie $*$ oznacza splot miary h z funkcją a. Równanie 3.9 jest zatem uogólnieniem wzoru 2.2.

W przypadku $S_qU(2)$ (dla $|q| < 1$) miarę Haara zadaje następujace twierdzenie [CMP]:

Twierdzenie 3.3 *Niech $(H, (\cdot|\cdot))$ będzie przestrzenią Hilberta z bazą ortonormalną*

$$(v_{nk} \colon n = 0, 1, 2, \ldots; k \in \mathbb{Z})$$

Niech π będzie reprezentacją A na H zadaną równaniami

$$\begin{aligned} \pi(\alpha)v_{nk} &= \sqrt{1 - q^{2n}}v_{n-1,k} \\ \pi(\beta)v_{nk} &= q^n v_{n,k+1} \end{aligned}$$

Wówczas funkcjonał $h \in A^*$ zadany wzorem

$$h(a) = (1 - q^2) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(v_{n0}|\pi(a)v_{n0})$$

jest miarą Haara na $S_qU(2)$.

Rozdział 4

Reprezentacje kwantowej grupy $SU(2)$

4.1. Standardowe formy reprezentacji

Definicja reprezentacji grupy kwantowej wykorzystuje odwzorowanie Δ:

Definicja 4.1 *Macierz $v \in M_n(A) = M_n(\mathbb{C}) \otimes A$ nazywamy (skończenie wymiarową) reprezentacją zwartej grupy kwantowej (A, u), jeśli spełniona jest równość*

$$v \oslash v = (id \otimes \Delta)v$$

Definicje reprezentacji równoważnych i reprezentacji nieprzywiedlnej przenoszą się na grupy kwantowe bez większych zmian. W przypadku $S_qU(2)$ teoria reprezentacji jest analogiczna do teorii klasycznej. Podobnie jak dla $SU(2)$ dla każdego $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ istnieje dokładnie jedna $2s+1$-wymiarowa reprezentacja nieprzywiedlna. Twierdzenie tej treści pochodzi z [SqU2], a w jego dowodzie wykorzystuje się rachunek różniczkowy na $S_qU(2)$ i reprezentacje infinitezymalne.

Twierdzenie 4.1 *Niech $s \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\}$ oraz niech $T = \{-s, -s+1, \ldots, s\}$. Dla $k \in T$ niech $x_k = \alpha^{s+k}\beta^{*s-k}$. Wówczas wzór*

$$\Delta(x_k) = \sum_{i \in T} x_i \otimes w_{ik}$$

jednoznacznie zadaje reprezentację $w^s = (w^s_{ik})_{i,k \in T}$ grupy $S_qU(2)$. Każda reprezentacja nieprzywiedlna $S_qU(2)$ jest równoważna pewnej w^s.

Korzystając z powyższego wzoru policzyłem reprezentacje nieprzywiedlne $S_qU(2)$ dla $s = 1, \frac{3}{2}$:

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta^* & \beta^{*2} \\ -(1+q^2)\beta\alpha & \alpha\alpha^* - \beta\beta^* & \frac{1}{q^2}(1+q^2)\beta^*\alpha^* \\ q^2\beta^2 & -q^2\alpha^*\beta & \alpha^{*2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^3 & \alpha^2\beta^* & \alpha\beta^{*2} & \beta^{*3} \\ -\frac{1}{q^3}(1+q^2+q^4)\alpha^2\beta & \alpha^2\alpha^* - \frac{1}{q^2}(1+q^2)\alpha\beta\beta^* & \frac{1}{q^2}(1+q^2)\alpha\beta^*\alpha^* - \frac{1}{q}\beta\beta^{*2} & \frac{1}{q^4}(1+q^2+q^4)\beta^{*2}\alpha^* \\ \frac{1}{q^2}(1+q^2+q^4)\alpha\beta^2 & \beta^2\beta^* - \frac{1}{q}(1+q^2)\alpha\beta\alpha^* & \alpha\alpha^{*2} - \frac{1}{q^2}(1+q^2)\beta\beta^*\alpha^* & \frac{1}{q^4}(1+q^2+q^4)\beta^*\alpha^{*2} \\ -q^3\beta^3 & q^2\beta^2\alpha^* & -q\beta\alpha^{*2} & \alpha^{*3} \end{bmatrix}$$

W przypadku $S_qU(2)$ ma również miejsce fakt analogiczny do twierdzenia 2.3 [SqU2].

Twierdzenie 4.2 *Niech* $r, s \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\}$. *Wówczas reprezentacja* $w^r \tilde{\otimes} w^s$ *jest równoważna sumie prostej* $w^{|s-r|} \oplus w^{|s-r|+1} \oplus \ldots \oplus w^{s+r}$.

Operacja $\tilde{\otimes}$ oznacza iloczyn tensorowy macierzy połączony z normalnym iloczynem elementów algebry A (formalna definicja znajduje się w [CMP]) i stanowi odpowiednik klasycznego iloczynu tensorowego reprezentacji.

4.2. Formy unitarne

Definicja unitarnej reprezentacji grupy kwantowej jest oczywistym uogólnieniem definicji klasycznej. Wykorzystując miarę Haara można podobnie jak w przypadku klasycznym sprowadzić reprezentacje $S_qU(2)$ do ich form unitarnych, zgodnie z następującym twierdzeniem [CMP]:

Twierdzenie 4.3 *Niech* v *będzie (skończenie wymiarową) reprezentacją* (A, u). *Niech*

$$Q = (id \otimes h)(v^* v)$$

Wówczas

$$w = (Q^{\frac{1}{2}} \otimes I) v (Q^{-\frac{1}{2}} \otimes I)$$

jest unitarną reprezentacją (A, u) *równoważną* v.

Unitarną formę reprezentacji nieprzywiedlnej $S_qU(2)$ o $s=1$ policzyłem bez użycia twierdzenia 4.3, rozkładając iloczyn tensorowy $u \tilde{\otimes} u$ na sumę prostą reprezentacji o $s=1$ i $s=0$ zgodnie z twierdzeniem 4.2. Jednowymiarową podprzestrzeń niezmienniczą odpowiadającą trywialnej podreprezentacji o $s=0$ można odnaleźć, korzystając z równości

$$(id \otimes h)(u \tilde{\otimes} u\, x) = x$$

jaką musi spełniać rozpinający ją wektor $x \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^4$. Okazuje się, że

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -q \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obcinając $u \tilde{\otimes} u$ do dopełnienia ortogonalnego przestrzeni rozpinanej przez x otrzymuje się reprezentację o $s=1$ od razu w postaci unitarnej:

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 & \sqrt{1+q^2}\alpha\beta^* & q^2\beta^{*2} \\ -\sqrt{1+q^2}\beta\alpha & \alpha\alpha^* - \beta\beta^* & \sqrt{1+q^2}\beta^*\alpha^* \\ \beta^2 & -\sqrt{1+q^2}\alpha^*\beta & \alpha^{*2} \end{bmatrix}$$

Wspomagając się programem do obliczeń symbolicznych Maxima policzyłem także formę unitarną reprezentacji o $s = \frac{3}{2}$, wykonując procedurę opisaną w twierdzeniu 4.3:

$$\begin{bmatrix} \alpha^3 & \frac{1}{q}\sqrt{1+q^2+q^4}\alpha^2\beta^* & \sqrt{1+q^2+q^4}\alpha\beta^{*2} & q^3\beta^{*3} \\ -\sqrt{1+q^2+q^4}\beta\alpha^2 & \alpha^2\alpha^* - (1+q^2)\beta\beta^*\alpha & -\beta\beta^{*2} + (1+q^2)\beta^*\alpha\alpha^* & \sqrt{1+q^2+q^4}\beta^{*2}\alpha^* \\ \sqrt{1+q^2+q^4}\beta^2\alpha & \frac{1}{q}\beta^2\beta^* - \frac{1}{q}(1+q^2)\beta\alpha\alpha^* & \alpha\alpha^* - (1+q^2)\alpha^*\beta\beta^* & \frac{1}{q}\sqrt{1+q^2+q^4}\beta^*\alpha^{*2} \\ -\beta^3 & \sqrt{1+q^2+q^4}\alpha^*\beta^2 & -\sqrt{1+q^2+q^4}\alpha^{*2}\beta & \alpha^{*3} \end{bmatrix}$$

Bibliografia

[Ser] J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, Springer-Verlag, New York Inc. 1977

[Kos] A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry, cz. 3. Podstawowe struktury algebraiczne*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005

[CMP] S. L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, Commun. Math. Phys. 111 (1987), 613–665.

[SqU2] S. L. Woronowicz, *Twisted* $SU(2)$ *group. An example of a non-commutative differential calculus*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 23 (1987), 117–181.