Typowe zadania z matematyki dla studentów biologii
semestr zimowy 2014/15

Michał Łasica

Spis treści

1 Logika

Zadanie 4. Sprawdź, czy poniższe funkcje zdaniowe są tautologiami:

i) $(p \vee q) \implies (\neg p \wedge q)$,

ii) $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$.

Rozwiązanie.

i) Wprowadźmy oznaczenie

$$F(p,q) \equiv ((p \vee q) \implies (\neg p \wedge q)) .$$

Funkcja zdaniowa F nie jest tautologią. Aby to uzasadnić, możnaby zapisać pełną tabelkę wartości logicznych funkcji zdaniowej w zależności od wartości logicznych zdań p i q. Nie jest to jednak konieczne, wystarczy bowiem podać jeden zestaw wartości logicznych zdań p i q dla którego *zdanie* $F(p,q)$ jest fałszywe. Przypuśćmy na przykład, że zarówno zdanie p jak i q są prawdziwe. Wówczas zdanie $\neg p$ jest fałszywe, zatem zdanie $\neg p \wedge q$ jest fałszywe. Ale zdanie $p \vee q$ jest prawdziwe. *Z prawdy nie może wynikać fałsz*, więc zdanie $(p \vee q) \implies (\neg p \wedge q)$ jest rzeczywiście fałszywe.

ii) Wprowadźmy oznaczenie

$$G(p,q) \equiv ((p \implies q) \iff (\neg p \vee q))\,.$$

Funkcja zdaniowa G jest tautologią. Aby to uzasadnić, trzeba sprawdzić, że zdanie $G(p,q)$ jest prawdziwe niezależnie od wyboru wartości logicznych zdań p i q. Wygodnie jest to zrobić uzupełniając następującą tabelkę, korzystając z definicji poszczególnych operatorów logicznych.

p	q	$\neg p$	$p \implies q$	$\neg p \vee q$	$G(p,q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Zadanie 7. Sformułuj możliwie naturalne zaprzeczenia następujących zdań nie używając konstrukcji typu *Nie jest prawdą, że...*

i) Lubię muzykę Bacha i Chopina.

ii) Każdy kto myśli, jest człowiekiem.

iii) Pójdę spać lub pooglądam serial.

iv) Piję piwo wtedy i tylko wtedy gdy jem chipsy.

v) Istnieje człowiek, który lubi szpinak.

Rozwiązanie. Przykładowe możliwości zaprzeczeń:

i) Nie lubię muzyki Bacha lub muzyki Chopina.

ii) Istnieje podmiot, który myśli i nie jest człowiekiem.

iii) Nie pójdę spać i nie poogladam serialu.

iv) Piję piwo wtedy i tylko wtedy, gdy nie jem chipsów.

v) Nikt nie lubi szpinaku.

2 Zbiory i relacje

Zadanie 1. Rozważmy następujące podzbiory płaszczyzny:

$$A = \{(x,y)\colon x \le 0\}, \quad B = [-1,2] \times [0,5], \quad C = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 \le 4\}.$$

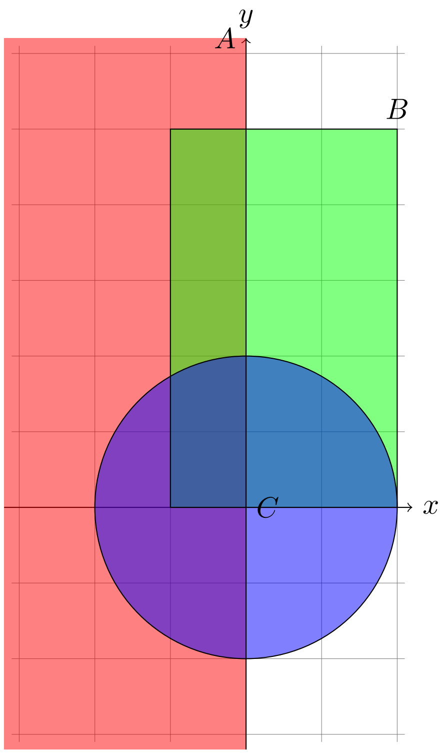
Narysuj zbiory A, B, C oraz

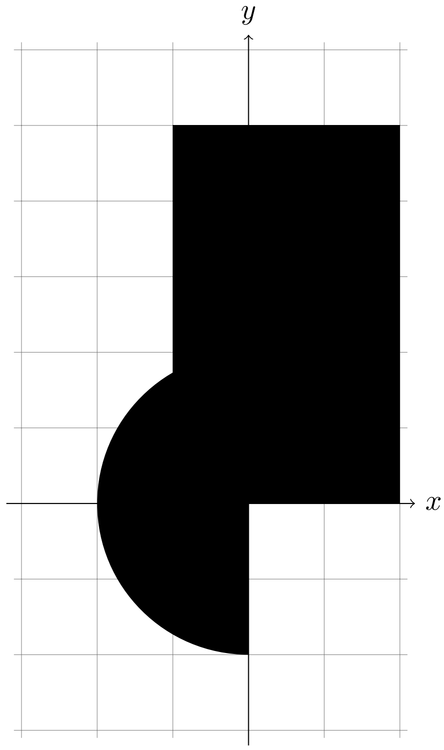
i) $B \cup (A \cap C)$,

ii) $B \cap (A \cup C)$,

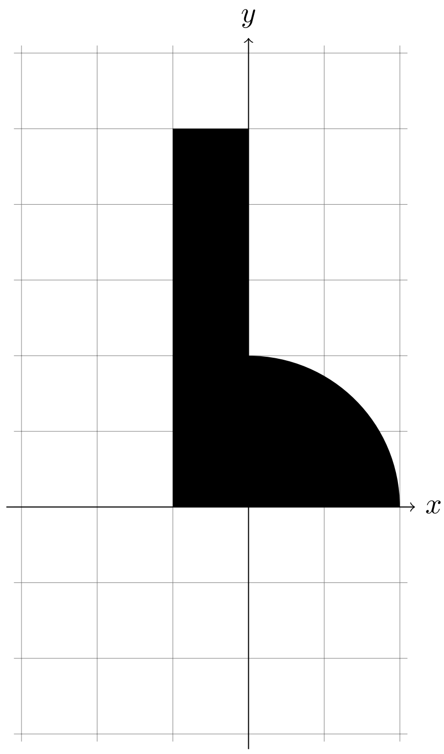
iii) $(A \setminus B) \cap C$,

Rozwiązanie.

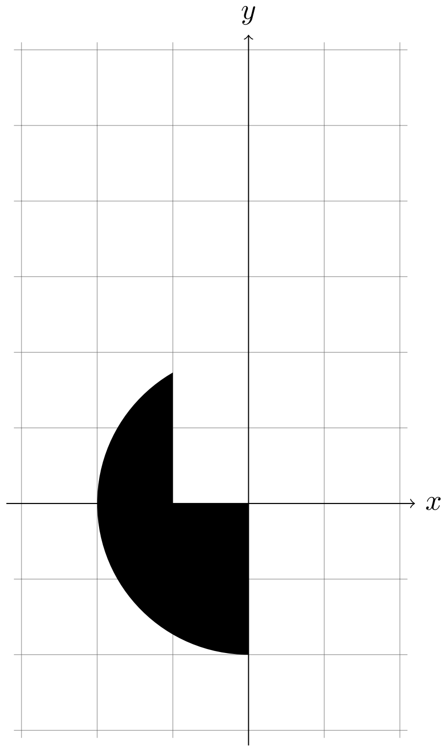




i)



ii)

iii) 

Zadanie 2. Które z następujących własności: zwrotność, symetria, antysymetria, przechodniość posiadają następujące relacje

i) pokrewieństwo,

ii) bycie rodzeństwem,

iii) bycie siostrą,

iv) bycie przodkiem,

v) starszeństwo.

Które z ww. są relacjami porządku, liniowego porządku, równoważności?

Rozwiązanie.

i) Musimy przyjąć jakąś definicję pokrewieństwa. Przypuśćmy, że krewni to osoby posiadające wspólnego przodka np. do 4 pokoleń wstecz. Tak zdefiniowana relacja

   – jest zwrotna – to oczywiste, każdy ma tych samych przodków co on sam;
   – jest symetryczna – wspólny przodek obu osób jest tak samo wspólny dla jednej jak i dla drugiej;
   – nie jest antysymetryczna – nie może być, aby to ściśle wykazać wystarczy wskazać parę krewnych A i B którzy są różnymi osobami, wówczas A jest krewnym B, B jest krewnym A, ale nie są tą samą osobą – to definicja antysymetrii;

- nie jest przechodnia – mama jest krewną dziecka, dziecko jest krewnym taty, ale mama najczęściej nie jest krewną taty.

ii) Przypuśćmy, że A *jest rodzeństwem dla* B znaczy A *ma tych samych oboje rodziców co* B. Tak zdefiniowana relacja

- jest zwrotna – to tak samo oczywiste jak w poprzednim przykładzie;
- jest symetryczna – jw.;
- nie jest antysymetryczna – jw.;
- jest przechodnia – jeśli A ma tych samych rodziców co B, a B ma tych samych rodziców co C, to ewidentnie A ma tych samych rodziców co C.

iii) Przypuśćmy, że chodzi dokładnie o relację A *jest siostrą* B Tak zdefiniowana relacja

- nie jest zwrotna – nikt nie jest własną siostrą (siostry syjamskie to wciąż dwie różne osoby);
- nie jest symetryczna – zdarza się, że A jest siostrą B, ale B jest dla A bratem;
- nie jest antysymetryczna – dowodzi tego istnienie rodzeństw składających się z co najmniej dwóch sióstr;
- jest przechodnia – jeśli A jest siostrą B, a B jest siostrą C to A jest siostrą C.

iv) Przypuśćmy, że chodzi o relację A *jest przodkiem dla* B Tak zdefiniowana relacja

- nie jest zwrotna – nikt nie jest własnym przodkiem;
- nie jest symetryczna – wręcz nigdy nie zdarza się, że A jest przodkiem dla B, a B jest przodkiem dla A;
- jest antysymetryczna – właśnie dlatego, że nigdy nie zdarza się, że A jest przodkiem dla B, a B jest przodkiem dla A – zatem implikacja w definicji antysymetrii jest spełniona w sposób pusty;
- jest przechodnia – jeśli A jest przodkiem B, a B jest przodkiem C, to A jest przodkiem C.

v) Przypuśćmy, że chodzi o relację A *urodził sie co najmniej tak wcześnie, jak* B Tak zdefiniowana relacja

- jest zwrotna – oczywiste;
- nie jest symetryczna – oczywiste;
- jest antysymetryczna – przynajmniej jeśli będziemy mierzyli czas urodzin z taką dokładnością, że żadne dwie różne osoby nie urodziły się w tym samym momencie;
- jest przechodnia – oczywiste.

Korzystając z odpowiednich definicji widzimy, że jako jedyna z powyższych relacją równoważności jest relacja bycia rodzeństwem, a jedyną relacją porządku jest relacja starszeństwa. Zgodnie z naszym założeniem, że żadna para ludzi nie urodziła się dokładnie w tym samym momencie, ta ostatnia jest relacją liniowego porzadku.

3 Funkcje. Funkcja logarytmiczna i wykładnicza

Zadanie 1. Niech X będzie zbiorem n-elementowym, a Y zbiorem k-elementowym. Ile jest różnych

i) relacji na X,

ii) funkcji $X \to Y$,

iii) bijekcji $X \to Y$.

Rozwiązanie.

i) Relacje na X to podzbiory zbioru $X \times X$ zawierającego wszystkie uporządkowane pary elementów X. Zastanówmy się najpierw, ile jest wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru m-elementowego Z. Wybór podzbioru Z dokonuje się przez określenie dla każego elementu Z, czy należy do podzbioru czy nie. Dla każdego elementu mamy zatem dwie opcje. Elementów dla których musimy dokonać wyboru jest zaś m, stąd ilość elementów Z to 2^m. Pozostaje pytanie, ile wynosi m, gdy $Z = X \times X$. Aby wybrać parę elementów musimy wybrać pierwszy element tej pary (co można zrobić na n sposobów) i, zupełnie niezależnie, drugi element, również na n sposobów. Wyboru pary można zatem dokonać na $n \cdot n = n^2$ sposobów. Wszystkich relacji na X jest zatem $2^{(n^2)}$.

ii) Aby zdefiniować funkcję $X \to Y$ należy, zupełnie niezaleznie od siebie, zdefiniować na jaki element Y przechodzi każdy z elementów X. Dla każdego z elementów X mozna to zrobić na dokładnie k sposobów, a elementów X jest n, zatem funkcji $X \to Y$ jest k^n.

iii) Jeśli X ma więcej elementów niż Y, to nie jest możliwa funkcja różnowartościowa $X \to Y$, jeśli zaś Y ma wiecej elementów niż X, nie jest możliwa funkcja *na* $X \to Y$. Zatem, aby w ogóle istniały jakieś bijekcje $X \to Y$, zbiory te muszą mieć tyle samo elementów (n). Wówczas wybór bijekcji przebiega w następujący sposób: dla pierwszego elementu określamy dowolnie na co przechodzi, co możemy zrobić na n sposobów. Drugiemu elementowi musimy przyporządkować inną wartośc funkcji niż pierwszemu, zatem mamy tylko $n-1$ możliwości. Wreszcie, ostatniemy elementowi X będziemy mogli przyporzadkowac tylko jeden, pozostały element Y. Zatem, bijekcji $X \to Y$ jest 0 jeśli zbiory te mają różną liczbę elementów, a $n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$ jeśli mają po n elementów.

Zadanie 2. Narysuj wykres funkcji

i) $y(x) = x^2$,

ii) $y(x) = 10^x$,

w skali logarytmicznej i półlogarytmicznej.

Rozwiązanie.

i) Aby stworzyć wykres w skali półlogarytmicznej, wykonujemy podstawienie $Y = \log y$, tj. $y = 10^Y$. Otrzymujemy

$$10^Y = x^2.$$

Po zlogarytmowaniu obu stron powyższego równania dostajemy

$$Y = \log x^2 = 2 \log x.$$

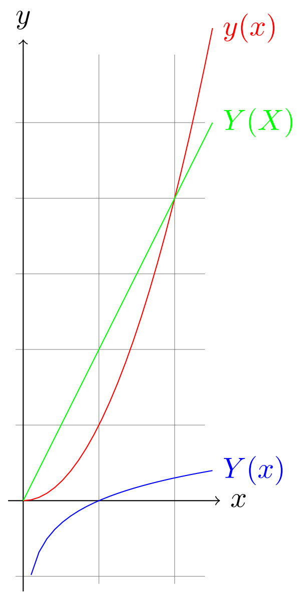
Wykres funkcji $y(x)$ w skali półlogarytmicznej jest z definicji tożsamy z wykresem

$$Y(x) = 2 \log x.$$

Aby stworzyć wykres w skali logarytmicznej wykonujemy oprócz podstawienia $Y = \log y$ także podstawienie $X = \log x$. W tym wypadku, biorąc pod uwagę dotychczasowe obliczenia jest to niezwykle łatwe:

$$Y(X) = 2X.$$

Wykres w skali logarytmicznej funkcji $y(x)$ jest z definicji tożsamy z wykresem funkcji $Y(X)$.



ii) Alternatywnie, możemy zlogarytmować obie strony równania definiującego funkcję, otrzymując dla $y(x) = 10^x$

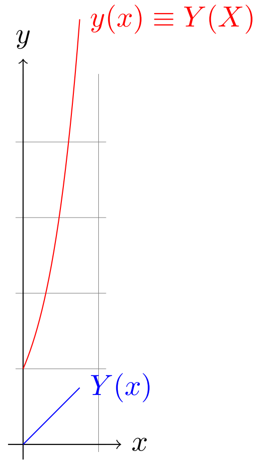
$$\log y = \log(10^x) = x,$$

czyli

$$Y(x) = x.$$

Następnie, aby otrzymać wykres w skali logarytmicznej, musimy wykonać podstawienie $X = \log x$, czyli $x = 10^X$. Otrzymujemy

$$Y(X) = 10^X.$$



4 Granica ciągu i funkcji

Zadanie 1. Oblicz granicę ciągu $\lim_{n\to\infty} a_n$, jeśli

i) $a_n = \frac{1}{n}$,

ii) $a_n = \frac{n-2}{n+2}$,

iii) $a_n = \frac{n^2-2}{n+2}$,

iv) $a_n = \frac{2n+3\cos n}{n-2\sin 5n}$,

v) $a_n = \frac{2^n}{3^n-2}$,

vi) $a_n = \frac{10^n+n}{10^n-n^2}$.

Rozwiązanie.

i) Z definicji granicy ciągu, tj. takiej liczby g, że

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq N}|a_n - g| < \varepsilon$$

widać, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(wystarczy dla danego ε wziąć dowolne $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

ii) Znając granicę z podpunktu *i)* łatwo policzyć granice ciągów stanowiących funkcje wymierne argumentu n korzystając z praw dotyczących sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów. W wypadku ciągu o wyrazie $a_n = \frac{n-2}{n+2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}$$

$$= \frac{1-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}} = \frac{1-0}{1+0}. \quad (1)$$

iii) W tym wypadku, poza standardowymi działaniami na skończonych granicach korzystamy z intuicyjnego, choć może nie do końca formalnego rachunku na nieskończonościach.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}$$
$$= [\infty \cdot 1] = \infty. \quad (2)$$

iv) Do obliczenia tej granicy stosujemy intuicyjne twierdzenie o trzech ciągach, szacując ciąg a_n z góry i z dołu przez ciągi zbieżne do tej samej granicy:

$$\frac{2n-3}{n+2} \le \frac{2n+3\cos n}{n-2\sin 5n} \le \frac{2n+3}{n-2};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 2;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n}} = 2.$$

Z powyższego wynika, że

$$\lim_{n\ to\infty} \frac{2n+3\cos n}{n-2\sin 5n} = 2.$$

v) Aby liczyć granice w których występuje zależność wykładnicza, zauważmy że

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & -1<a<1 \end{cases}$$

zaś dla $a \le -1$ granica nie istnieje. Stąd, korzystajac z własności granicy i funkcji wykładniczej,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{0}{1} = 0.$$

vi) W tym punkcie napotykamy problem porównania wzrostu funkcji potęgowej n^a, $a>0$ i wykładniczej b^n, $b>1$. Funkcja wykładnicza rośnie szybciej, co łatwo można wykazać korzystajac np. z *indukcji matematycznej.* Aby zilustrować tę technikę dowodzenia faktów dotyczących liczba naturalnych wykażemy, że $10^n > n^3$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dowód indukcyjny składa się z dwóch części:

1. Początek indukcji.
   Sprawdzamy, że twierdzenie zachodzi dla pierwszej liczby naturalnej, dla której podejrzewamy jego prawdziwość. W naszym wypadku jest to 1. Rzeczywiście,
   $$10^1 = 10 > 1 = 1^3.$$

2. Krok indukcyjny.
   Sprawdzamy, że z prawdziwości twierdzenia dla $n = k$ wynika jego prawdziwość dla $n = k + 1$ (gdzie k jest dowolną liczbą naturalną). Załóżmy zatem, że
   $$10^k > k^3$$
   i spróbujmy wydedukować, że prawdziwa jest nierówność $10^{k+1} > (k+1)^3$. Rzeczywiście jest to prawda, bowiem:
   $$10^{k+1} = 10 \cdot 10^k,$$
   $$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \leq k^3 + 3k^3 + 3k^3 + k^3 \leq 8k^3 < 10k^3$$
   dla każdego $k \in \mathbb{N}$, co kończy dowód.

Wróćmy do właściwej części zadania. Widzimy, że
$$0 \leq \frac{n^2}{10^n} \leq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \to 0,$$
zatem
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{10^n} = 0$$
i podobnie
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{10^n} = 0.$$
Wykorzystując te wiedzę, jesteśmy w stanie obliczyć zadaną granicę
$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^n + n}{10^n - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{n}{10^n}}{1 - \frac{n^2}{10^n}} = 1.$$

Zadanie 2. Czy istnieje taka stała a, by funkcja dana wzorem
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x < 0, \\ 4x + a & x \geq 0 \end{cases}$$
była ciągła?

Rozwiązanie. Funkcja f jest ciągła w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $(0, \infty)$ niezależnie od parametru a. Wystarczy zatem sprawdzić, czy da się tak ustalić a, by
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$
Sprawdźmy:
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = a, \quad f(0) = a.$$
Aby zatem f była ciągła, potrzeba i wystarcza położyć $a = -1$.

5 Pochodna funkcji

Zadanie 1. Znajdź prostą styczną do wykresu funkcji f w punkcie x_0, jeśli

i) $f(x) = x^2, \quad x_0 = 1,$

ii) $f(x) = x^2, \quad x_0 = 0,$

iii) $f(x) = (x+1)\ln(x+1), \quad x_0 = 0.$

Rozwiązanie. Równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0 jest następujące:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Stąd, rozwiązanie zadania sprowadza się do policzenia pochodnych (i wartości) funkcji w odpowiednich punktach.

i) Wykonujemy obliczenia:

$$f'(x) = 2x, \quad f'(1) = 2, \quad f(1) = 1.$$

Zatem szukane równanie stycznej ma postać $y = 2(x-1)+1$, czyli po uproszczeniu

$$y = 2x - 1.$$

ii) Wykonujemy obliczenia:

$$f'(x) = 2x, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 0.$$

Zatem szukane równanie stycznej ma postać $y = 0(x-0)+0$, czyli po uproszczeniu

$$y = 0.$$

iii) Wykonujemy obliczenia:

$$f'(x) = (x+1)' \cdot \ln(x+1) + (x+1) \cdot (\ln(x+1))' = 1 \cdot \ln(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$= \ln(x+1) + 1, \quad f'(0) = 1, \quad f(0) = 0.$$

Zatem szukane równanie stycznej ma postać

$$y = x.$$

Zadanie 2. Podstawowy metabolizm ptaka (czyli energia potrzebna do życia bez wykonywania jakiejkolwiek czynności) wynosi 64 mg tłuszczu na godzinę. Aby lecieć z prędkością v km/h zużywa dodatkowo $\frac{v^2}{100}$ mg tłuszczu na godzinę lotu. Wyznacz optymalną prędkość przelotową tego ptaka, tak by w trakcie przelotu odległości 800 km zużył jak najmniej tłuszczu. Ile tłuszczu zużyje ptak podczas tego lotu? Czy prędkość optymalna ulegnie zmianie, jeśli ptak będzie musiał przelecieć 200 km więcej?

Rozwiązanie. Oznaczmy przez s odległość do pokonania przez ptaka (w km), przez t czas lotu (w h), a przez f – tłuszcz zużyty podczas lotu (w mg). Wówczas całkowita ilość tłuszczu zużyta przez ptaka w zależności od prędkości przelotowej i czasu lotu wyraża się zależnością

$$f = 64 \cdot t + \frac{v^2}{100} \cdot t.$$

W zależności tej występują dwie zmienne – t i v. Wiemy jednak, że przy ustalonej drodze s czas t jest zdeterminowany przez prędkość v wg zależności $t = \frac{s}{v}$ zatem przy ustalonej drodze s, f jest funkcją v:

$$f(v) = \left(64 \cdot \frac{1}{v} + \frac{1}{100} \cdot v\right) \cdot s.$$

Aby znaleźć minimum $f(v)$, zbadamy pochodną $f'(v)$.

$$f'(v) = \left(-64 \cdot \frac{1}{v^2} + \frac{1}{100}\right) \cdot s.$$

Jeśli istnieje ekstremum lokalne $f(v)$, jest osiągane w argumencie v_0 przy którym $f'(v)$ się zeruje. Musimy zatem rozwiązać równanie

$$\left(-64 \cdot \frac{1}{v_0^2} + \frac{1}{100}\right) \cdot s = 0.$$

Po prostych przekształceniach dostajemy

$$v_0^2 = 6400.$$

Prędkość rozumiana jako iloraz pokonanej drogi przez czas jest zawsze nieujemna, zatem dostajemy

$$v_0 = 80.$$

Analizując znak $f'(v)$, widzimy że jest on ujemny dla *wszystkich* dodatnich v mniejszych od v_0 i dodatni dla *wszystkich* v większych od v_0. Stąd wynika, że $f(v)$ ma minimum *globalne* w v_0, zatem szukana optymalna prędkość przelotu to 80 km/h. Przy optymalnej prędkości całkowite zużycie tłuszczu wynosi

$$f(80) = \left(64 \cdot \frac{1}{80} + \frac{1}{100} \cdot 80\right) \cdot 800 = (0,8 + 0,8) \cdot 800 = 1280$$

miligramów. Wreszcie, widzimy że optymalna prędkość v_0 nie zależy od drogi s (skraca się ona w równaniu na v_0).

6 Wypukłość. Całki

Zadanie 1. W jakich przedziałach jest wklęsła, a w jakich wypukła funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

i) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$,

ii) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

Rozwiązanie. Funkcja jest wypukła w danym przedziale, jeśli ma w nim nieujemną drugą pochodną, jeśli druga pochodna jest niedodatnia, to funkcja jest wklęsła. Zadanie sprowadza się więc do zbadania znaku drugiej pochodnej.

i) Liczymy najpierw pierwszą pochodną (korzystając ze wzoru na pochodną złożenia funkcji):

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x),$$

a nastepnie różniczkujemy jeszcze raz:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' \cdot (-x) + e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x)' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (x^2 - 1).$$

Czynnik $e^{-\frac{x^2}{2}}$ jest stale dodatni, zatem znak pochodnej jest identyczny ze znakiem funkcji x^2-1, czyli *wesołej* funkcji kwadratowej o miejscach zerowych $-1, 1$. Zatem

$$f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \quad f''(x) < 0 \iff x \in (-1, 1),$$

czyli f jest wypukła w przedziałach $(-\infty, -1)$ i $(1, \infty)$, a wklęsła w $(-1, 1)$.

ii) Jw., liczymy pierwszą

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

a następnie druga pochodną

$$f''(x) = 3x^2 - 6x + 2.$$

Jest to *wesoła* funkcja kwadratowa o miejscach zerowych $\frac{6\pm2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Zatem f jest wypukła w przedziałach $(-\infty, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$ i $(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$, a wklęsła w $(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Zadanie 2. Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi

i) $y = 1 - x^2, y = 0,$

ii) $y = \frac{1+x}{1-x}, x = 0, y = 0,$

iii) $y = 2 - x^4, y = x^2.$

Rozwiązanie. Obliczanie pól figur jest zasadniczym zastosowaniem całki oznaczonej.

i) Figura ta jest tożsama z *obszarem pod wykresem* funkcji $f(x) = 1-x^2$ pomiędzy punktami $(x, 0)$ takimi, że $1 - x^2 = 0$, tj. $x = -1$, $x = 1$. W tej sytuacji pole wyraża sie całką oznaczoną

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\mathrm{d}x.$$

Obliczmy najpierw całkę nieoznaczoną (to łatwe zadanie, wystarczy pamiętać o wzorze na pochodną funkcji potęgowej):

$$\int (1-x^2)\mathrm{d}x = x - \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Teraz możemy obliczyć całkę oznaczoną podstawiajac graniczne wartości -1, 1 za x:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)\mathrm{d}x = \left(1 - \frac{1}{3}1^3 + C\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}(-1)^3 + C\right) = \frac{4}{3}.$$

ii) Aby znaleźć współrzędną x punktu przecięcia krzywej $y = \frac{1+x}{1-x}$ z prostą $y = 0$, rozwiązujemy równanie

$$0 = \frac{1+x}{1-x}.$$

Widać, że jedynym rozwiązaniem tego równania jest $x = -1$. Zatem, szukane pole wyraża się całką oznaczoną

$$\int_{-1}^{0} \frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x.$$

Obliczmy najpierw odpowiednią całkę nieoznaczoną. Aby to osiągnąć, należy w odpowiedni sposób rozłożyć ułamek $\frac{1+x}{1-x}$:

$$\int \frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x = \int \frac{-1+x+2}{1-x}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{1-x} - 1\mathrm{d}x = -2\ln(1-x) - x + C.$$

Teraz możemy obliczyć całkę oznaczoną podstawiajac graniczne wartości -1, 0 za x:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x = (-2\ln(1) - 0 + C) - (-2\ln(1-(-1)) - (-1) + C) = 2\ln 2 - 1.$$

iii) Znajdźmy współrzędne x punktów przecięcia krzywych ograniczajacych obszar. Spełniają one równanie

$$2 - x^4 = x^2, \quad \text{tj. } x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe ze względu na x^2. Jego miejsca zerowe to 1 oraz -2. Oczywiscie x^2 nie może być równe -2, zatem punkty przecięcia spełniają równanie x^2, więc ich współrzędne x są równe -1 i 1. Szukane pole jest różnicą pól obszarów pod wykresami funkcji $2-x^4$ i x^2, zatem wyraża się przez różnicę całek oznaczonych

$$\int_{-1}^{1} (2-x^4)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x,$$

przy czym suma całek jest całką z sumy, więc to ta sama liczba co

$$\int_{-1}^{1} (2-x^4-x^2)\mathrm{d}x.$$

Obliczmy odpowiednią całkę nieoznaczoną:

$$\int (2-x^4-x^2)\mathrm{d}x = 2x - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + C$$

i oznaczoną:

$$\int_{-1}^{1} (2-x^4-x^2)\mathrm{d}x = \left(2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + C\right) - \left(-2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + C\right) = 5\frac{1}{15}.$$

7 Gradient funkcji wielu zmiennych

Zadanie 1. Znajdź kierunek najszybszego wzrostu funkcji $f(x, y) = (\cos(xy) + x)^2$ w punkcie $(x, y) = (1, \frac{\pi}{2})$ i oblicz szybkość wzrostu f w tym kierunku.

Rozwiazanie. Kierunek najszybszego wzrostu f jest dany przez *gradient*, czyli wektor złożony z *pochodnych cząstkowych* $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$. Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}$ (dla przykładu) to pochodna z funkcji f potraktowanej jako funkcję jednej zmiennej x (druga zmienna y jest potraktowana jako stała):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(\cos(xy) + x)(-\sin(xy)y + 1).$$

Analogicznie

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(\cos(xy) + x) \cdot (-\sin(xy)x).$$

Podstawiając $(x, y) = (1, \frac{\pi}{2})$ otrzymujemy

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + 1\right)\left(\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} + 1\right) = 2 - \pi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + 1\right)\left(-\sin\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) = -2.$$

Zatem szukany gradient jest równy $(2 - \pi, -2)$. Maksymalna szybkośc wzrostu f w punkcie $(1, \frac{\pi}{2})$ to długość gradientu, czyli

$$\sqrt{(2 - \pi)^2 + 4}.$$

Zadanie 2. Znajdź maksymalną wartość funkcji $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ i punkt w którym jest osiągana.

Rozwiązanie. $f(x, y)$ dąży do 0 gdy x lub y dąży do ∞ lub $-\infty$. Zatem f musi osiągać swoją maksymalną wartość w jednym ze swoich maksimów lokalnych. Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych w danym punkcie jest zerowanie się jej wszystkich pochodnych cząstkowych w tym punkcie (innymi słowy, zerowanie się gradientu). Policzmy pochodne cząstkowe f:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x+y) \cdot (1 + x^2 + y^2) - (x+y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(1 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(1 + x^2 + y^2) - (x+y) \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 - 2xy + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

i analogicznie

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2 - 2xy + 1}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Z warunku zerowania się pochodnych czastkowych dostajemy układ równań

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 - 2xy + 1 = 0, \\ x^2 - y^2 - 2xy + 1 = 0. \end{cases}$$

Dodając i odejmując te równania od siebie dostajemy układ równań (równoważny, bo można od niego tą samą operacją przejśc do wyjściowego)

$$\begin{cases} -4xy + 2 = 0, \\ 2y^2 - 2x^2 = 0. \end{cases}$$

Z drugiego z powyższych równań wynika, że $x^2 = y^2$, zatem $x = y$ lub $x = -y$. Podstawiając to do pierwszego z równań dostajemy

$$-4x^2 + 2 = 0, \quad \text{lub } 4x^2 + 2 = 0.$$

Druga możliwość jest sprzeczna, pierwsza ma rozwiązania $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Stąd wyliczamy y za pomocą równania $y = x$. Dostajemy dwa punkty, w których mogą znajdować się ekstrema lokalne: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oraz $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Podstawiając je do wzoru na f dostajemy

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zatem punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ musi być maksimum globalnym f. Maksymalna wartość f to wartość w tym punkcie, czyli $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

8 Równania różniczkowe zwyczajne. Modele z czasem ciągłym

Zadanie 1. Rozwiąż zagadnienia początkowe

i) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha}{\sqrt{t}}, \quad x(0) = 1,$

ii) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha}{\sqrt{x}}, \quad x(0) = 1.$

Rozwiązanie. Równania występujące w zadaniu można rozwiązać metodą *rozdzielania zmiennych.* Formalnie traktuje się *różniczki* $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}t$ jako oddzielne byty i przekształca się równania tak, by zmienne x i t znajdowały się po różnych stronach. Następnie wykonuje się całkę nieoznaczoną z obu stron, wyznacza stałą całkowania, tak by spełniony był warunek początkowy i w razie potrzeby rozwikłuje otrzymane równanie.

i) Aby rozdzielić zmienne w tym równaniu, wystarczy pomnożyć obie strony przez $\mathrm{d}t$. Otrzymujemy w ten sposób

$$\mathrm{d}x = \alpha\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Całkujemy lewą stronę

$$\int \mathrm{d}x = x + C,$$

następnie prawą

$$\int \alpha \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \alpha \int t^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \alpha \cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C.$$

Zatem rozwiązanie ma postać

$$x = 2\alpha t^{\frac{1}{2}} + C.$$

Pozostaje wyznaczyć stałą C z warunku poczatkowego $x(0) = 1$:

$$1 = 0 + C \implies C = 1.$$

Zatem

$$x(t) = 2\alpha t^{\frac{1}{2}} + 1.$$

ii) Aby rozdzielić zmienne w tym równaniu, poza pomnożeniem go przez dt, musimy pomnożyć je przez $\sqrt{x}$. Dostajemy wówczas

$$\sqrt{x}\mathrm{d}x = \alpha \mathrm{d}t.$$

Całkujemy lewą stronę

$$\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

i prawą

$$\int \alpha \mathrm{d}t = \alpha t + C.$$

Stąd

$$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \alpha t + C.$$

Z warunku początkowego $x(0) = 1$ dostajemy

$$C = \frac{2}{3}.$$

Odwikłując ze względu na x otrzymujemy

$$x(t) = \left(1 + \frac{3}{2}\alpha t\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Zadanie 2. Rozważmy reakcję chemiczną $2NO_2 \rightleftarrows N_2O_4$.

i) W warunkach niskiej temperatury można zaniedbać rozkład N_2O_4 i reakcja przybiera postać $2NO_2 \to N_2O_4$. Prędkość tej reakcji jest proporcjonalna (przypuśćmy, ze współczynnikiem proporcjonalności 1) do kwadratu stężenia c ditlenku azotu. Napisz równanie różniczkowe spełniane przez c, rozwiąż je (zakładając, że w chwili początkowej stężenie $c(0)$ wynosi $c_0 > 0$) i oblicz $\lim_{t\to\infty} c(t)$.

ii) W warunkach równowagowych należy uwzględnić rozkład N_2O_4. Przypuśćmy, że w pewnych warunkach stała szybkości tej reakcji jest równa 1 podobnie jak stała szybkości reakcji syntezy NO_2. Napisz układ równań różniczkowych spełnianych przez stężenie c ditlenku azotu oraz stężenie d tetratlenku diazotu. Zakładając, że w chwili początkowej reaktor zawiera czysty NO_2 o stężeniu c_0 oblicz wielkości c i d po ustaleniu równowagi.

Rozwiązanie.

i) Aby napisać szukane równanie różniczkowe, musimy powiązać szybkość *reakcji*, równą zgodnie z treścią zadania c^2, z szybkością zmian stężenia NO_2, czyli $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$. Podczas każdej pojedynczej reakcji $2NO_2 \to N_2O_4$ ubywają dwie cząsteczki NO_2, zatem

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -2c^2.$$

To równanie można rozwiązać metodą rozdzielania zmiennych:

$$-\frac{1}{c^2}\mathrm{d}c = 2\mathrm{d}t$$

czyli po scałkowaniu

$$\frac{1}{c} = 2t + C.$$

Uwzględniając warunek początkowy dostajemy

$$\frac{1}{c_0} = C$$

i

$$\frac{1}{c} = 2t + \frac{1}{c_0}$$

czyli ostatecznie

$$c(t) = \frac{c_0}{1 + 2tc_0}.$$

Możemy teraz policzyć granicę

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{c_0}{1 + 2tc_0} = 0$$

co oznacza, że po odpowiednio długim czasie stężenie NO_2 będzie dowolnie małe.

ii) Tym razem mamy tak naprawdę do czynienia z układem dwóch reakcji:

$$2NO_2 \to N_2O_4,$$

$$2NO_2 \leftarrow N_2O_4.$$

Aby obliczyć szybkość zmian stężenia NO_2 musimy zsumować spadek w pierwszej reakcji ($-2c^2$) i wzrost w drugiej ($2d$):

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -2c^2 + 2d.$$

Podobnie, szybkość zmian stężenia N_2O_4 to suma wzrostu w pierwszej reakcji (c^2) i spadku w drugiej ($-d$):

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t} = c^2 - d.$$

Równowaga to stan w którym stężenia reagentów się nie zmeniają, tj.

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Oba te warunki sprowadzają się do równania

$$c^2 = d.$$

Aby obliczyć stężenia równowagowe w naszej sytuacji, musimy uwzględnić warunek początkowy i *zasadę zachowania masy*. Zauważmy mianowicie, że

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c + 2d) = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} + 2\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Wynika stąd, że $c(t) + 2d(t) = C$. Stałą C możemy wyliczyć z warunku początkowego $c(0) = c_0$, $d(0) = 0$. Wynosi ona zatem c_0 i mamy układ równań

$$\begin{cases} c + 2d = c_0, \\ c^2 = d. \end{cases}$$

Stąd wyliczamy c:

$$2c^2 + c - c_0 = 0 \implies c = \tfrac{1}{4}(\sqrt{1 + 8c_0} - 1)$$

(drugi pierwiastek równania kwadratowego jest ujemny) i d:

$$d = \tfrac{1}{2}(c_0 - c) = \tfrac{1}{8}(1 + 4c_0 - \sqrt{1 + 8c_0}).$$