Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 1. Zagadnienia początkowe. Równania o rozdzielonych zmiennych.

Zadanie 1. Na rachunku oszczędnościowym pani Kowalskiej w chwili $t_0 = 0$ znajduje się x_0 złotych. Przyjmijmy, że kapitalizacja odsetek na rachunku następuje w sposób ciągły, a nominalna roczna stopa procentowa wynosi a. To znaczy, że szybkość przyrostu oszczędności na koncie na skutek oprocentowania to $a \cdot x$ zł./rok, gdzie x to kapitał znajdujący się w danej chwili na koncie. Ponadto, pani Kowalska wypłaca z konta pieniądze, również w sposób ciągły, z szybkością b zł./rok.

(a) Ile pieniędzy znajdzie się na koncie w chwili $t > 0$, jeśli $b = 0$?

(b) Przy ustalonych wartościach a, b, ile musi wynosić x_0 aby pieniądze na koncie nigdy się nie wyczerpały?

(c) Przy ustalonych a, b, ile musi wynosić x_0 aby pieniędzy wystarczyło na T lat?

(d) Znajdź przybliżone wartości x_0 z punktów (b) i (c) jeśli $a = 0{,}05$, $b = 50\,000$, $T = 40$.

Zadanie 2. W populacji liczącej p osób wybuchła epidemia nowego wirusa. Przypuśćmy, że wirus zaraża nowych nosicieli z szybkością $k \cdot x \cdot (p - x)$ osób na miesiąc, gdzie x to liczba zarażonych w danej chwili, a k jest pewną dodatnią stałą.

(a) Znajdź liczbę zarażonych w chwili $t > 0$, jeśli w chwili $t_0 = 0$ jest ich $x_0 \in]0, p[$.

(b) Przypuśćmy, że stała k jest nieznana. W chwili $t_0 = 0$ jest x_0 zarażonych, a w chwili $t_1 > 0$ jest ich $x_1 > x_0$. Po jakim czasie zarażona będzie połowa populacji? Po jakim czasie zarażona będzie cała populacja?

(c) Znajdź przybliżone wartości wyników z punktu (b), jeśli $p = 10^9$, $x_0 = 10$, $t_1 = 1$, $x_1 = 1000$.

Zadanie 3. Znajdź krzywą $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ o takiej własności, że dla każdego punktu $(x_0, y_0) \in \gamma$, pole trójkąta utworzonego przez styczną do krzywej w punkcie (x_0, y_0), prostą $x = x_0$ oraz prostą $y = 0$ jest równe $\frac{1}{2}$. Ponadto, $(0, 1) \in \gamma$.

Zadanie 4. Znajdź maksymalne rozwiązanie zagadnienia początkowego. Zbadaj zachowanie rozwiązania na końcach przedziału określoności.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = \exp(t + x), \\ x(0) = 0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} t\dot{x} = 1 + x^2, \\ x(1) = 0. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{x}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} xy + (x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \\ y(0) = -1. \end{cases}$ (e) $\begin{cases} e^{-s}\left(1 + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = 1, \\ s(0) = 1. \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \dot{x} = \cos(t + x), \\ x(0) = 0. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} (x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ (h) $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{ctg} x, \\ x(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$ (i) $\begin{cases} 2yy' + 2 = y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 2. Jednoznaczność. Potok równania różniczkowego.

Zadanie 1. Znajdź wszystkie rozwiązania równania spełniające warunek $x(0) = 0$.

$$\text{(a) } \dot{x} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}. \qquad \text{(b) } \dot{x} = 2\sqrt{|x|}. \qquad \text{(c) } t^2\dot{x} = x.$$

$$\text{(d) } \dot{x} = \begin{cases} x\ln|x| & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0 & \text{gdy } x = 0. \end{cases} \qquad \text{(e) } \dot{x} = \begin{cases} x(\ln|x|)^2 & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0 & \text{gdy } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{(f) } \dot{x} = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}\sin\frac{1}{x} & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0 & \text{gdy } x = 0. \end{cases}$$

Zadanie 2. Niech I, J będą odcinkami otwartymi (być może nieograniczonymi) i niech $t_0 \in I$. Przypuśćmy, że $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ jest ciągła i lokalnie lipschitzowska ze względu na drugą zmienną.

(a) Niech $x_1\colon I \to J$ oraz $x_2\colon I \to J$ będą rozwiązaniami równania $\dot{x} = f(t, x)$ takimi, że $x_2(t_0) \geq x_1(t_0)$. Wykaż, że $x_2(t) \geq x_1(t)$ dla każdego $t \in I$.

(b) Niech $x_0 \in J$. Przypuśćmy, że $f(t, x_0) = 0$ dla każdego $t \in I$. Niech $x\colon I \to J$ będzie rozwiązaniem równania $\dot{x} = f(t, x)$ takim, że $x(t_0) \leq x_0$. Wykaż, że $x(t) \leq x_0$ dla każdego $t \in I$.

Zadanie 3. Wyznaczywszy kilka izoklin, naszkicuj pole kierunków i krzywe całkowe danego równania. Wyznacz punkty, w których rozwiązania mają ekstrema lokalne.

$$\text{(a) } \dot{x} = x - t^2. \qquad \text{(b) } \dot{x} = \frac{x^2 + t^2}{2} - 1. \qquad \text{(c) } x\dot{x} + t = 0.$$

$$\text{(d) } \dot{x} = \frac{x - 3t}{t + 3x}. \qquad \text{(e) } \dot{x} = x(2 - x). \qquad \text{(f) } (1 + x^2)\dot{x} = x - t.$$

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 3. Równania liniowe niejednorodne.

Zadanie 0. Wykaż, że jeśli $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi oraz $x_0 \in \mathbb{R}$, to zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{x} = g(t)x + h(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

ma dokładnie jedno globalne rozwiązanie.

Zadanie 1. Znajdź rozwiązanie równania z warunkiem początkowym $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$. Czy istnieje ono globalnie? Zbadaj jego zachowanie na krańcach przedziału określoności.

(a) $\dot{x} = x - e^t$. (b) $\dot{x} = x - \frac{e^t}{1+t^2}$. (c) $\dot{x} + tx = t^3$.
(d) $\dot{x} + x = \sin t$. (e) $\dot{x} = x\cos t + \cos^3 t$. (f) $\dot{x} = \frac{2t}{1+t^2}x + \frac{1}{1+t^2}$.
(g) $\dot{x} + x \operatorname{tg} t = \sin t$. (h) $\dot{x} + x \operatorname{tg} t = \cos t$. (i) $(1+t)\dot{x} = x + 1 - t^2$.

Zadanie 2. Wykaż, że jeśli $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to istnieje dokładnie jedna liczba $x_0 \in \mathbb{R}$ taka, że zagadnienie

$$\begin{cases} \dot{x} = x + h(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ma ograniczone globalne rozwiązanie. Wykaż, że jeśli ponadto h jest okresowa, to rozwiązanie to jest okresowe.

Zadanie 3. Promieniotwórczy izotop polonu 210 otrzymuje się z rozpadu β^- bizmutu 210, który można wyprodukować przez bombardowanie stabilnego bizmutu 209 neutronami. Przypuśćmy, że w chwili początkowej w spreparowanej kostce cukru znajduje się x_0 atomów bizmutu 210. Na skutek rozpadu β^-, liczba atomów bizmutu zmniejsza się z szybkością $a \cdot x(t)$, gdzie $x(t)$ to liczba atomów w chwili $t > 0$, zaś $a > 0$ jest stałą. Z każdego atomu bizmutu w wyniku rozpadu powstaje atom polonu 210 rozpadającego się z szybkością $b \cdot y(t)$, gdzie $y(t)$ to liczba atomów polonu w chwili $t > 0$, zaś $b > 0$ jest stałą.

(a) Znajdź $x(t)$ a następnie $y(t)$ w chwili $t > 0$.

(b) Po jakim czasie liczba atomów polonu w kostce cukru osiągnie maksimum?

(c) Znajdź przybliżoną wartość liczbową wyniku z punktu (b) wiedząc, że czas połtrwania t_a bizmutu 210 to ok. 5 dni, a czas połtrwania t_b polonu 210 to ok. 138 dni.
Wskazówka. Czas połtrwania to czas, po jakim liczba atomów pierwiastka promieniotwórczego w jego czystej próbce zmniejsza się o połowę. Sprawdź, że $a \cdot t_a = b \cdot t_b = \ln 2$.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 4. Równania Bernoulliego/Riccatiego. Równania jednorodne.

Zadanie 1. Wyznacz maksymalne rozwiązanie zagadnienia początkowego. Czy istnieje ono globalnie? Zbadaj jego zachowanie na krańcach przedziału określoności.

(a) $\begin{cases} \dot{x} + tx + t^3x^3 = 0, \\ x(0) = 1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2\dot{x} - x = \frac{1}{x}e^t, \\ x(0) = 1. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{x}\cos x + t\sin x = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \\ x(0) = 0. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = (1+x^2)\left(\operatorname{arctg} x + te^t\right), \\ x(0) = 0. \end{cases}$

Zadanie 2. Wyznacz maksymalne rozwiązanie zagadnienia początkowego. Czy istnieje ono globalnie? Zbadaj jego zachowanie na krańcach przedziału określoności.

(a) $\begin{cases} \dot{x} - 2tx + x^2 = 5 - t^2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} + 2xe^t - x^2 = e^{2t} + e^t, \\ x(0) = 0. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y' + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Zadanie 3. Wyznacz maksymalne rozwiązanie zagadnienia początkowego. Czy istnieje ono globalnie? Zbadaj jego zachowanie na krańcach przedziału określoności.

(a) $\begin{cases} (x\,y - x^2)y' = y^2, \\ y(1) = 2. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x\,y' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}, \\ y(1) = \pi. \end{cases}$

Zadanie 4. Znajdź wszystkie maksymalne rozwiązania zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} 2x^3\,y' = y(2x^2 + y^2), \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Zbadaj ich zachowanie na krańcach przedziałów określoności.

Zadanie 5. Znajdź kształt zwierciadła, które skupia padające na nie równolegle do siebie promienie światła w punkt.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 5. Nierówności różniczkowe. Ciągła zależność od danych.

Zadanie 1. Niech I będzie przedziałem (być może nieograniczonym) i niech U będzie otoczeniem $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Funkcja $f\colon I \times U \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła i lipschitzowska ze względu na drugą zmienną ze stałą L. Przypuśćmy, że $x_1, x_2\colon I \to U$ są rozwiązaniami równania $\dot{x} = f(t,x)$. Wykaż, że

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq e^{L|t|}|x_1(0) - x_2(0)| \qquad \text{dla } t \in I.$$

Zadanie 2. Niech I, J będą przedziałami (być może nieograniczonymi). Funkcja $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ jest ciągła i lokalnie lipschitzowska ze względu na drugą zmienną. Niech X będzie podzbiorem zbioru wszystkich rozwiązań równania $\dot{x} = f(t,x)$ określonych na I takim, że

$$\overline{x}(t) := \sup_{x \in X} x(t) \in J \qquad \text{dla } t \in I.$$

Wykaż, że określona tym wzorem funkcja $\overline{x}\colon I \to J$ jest rozwiązaniem równania $\dot{x} = f(t,x)$.

Zadanie 3. Niech $T > 0$. Funkcja $f\colon [0,T[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła i spełnia warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną ze stałą $L > 0$, funkcja $g\colon [0,T[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła. Przypuśćmy, że

$$\sup_{t\in[0,T[,\ x\in\mathbb{R}^n} |f(t,x) - g(t,x)| = M < +\infty.$$

Niech ponadto funkcje $x, y \in C^1([0,T[, \mathbb{R}^n)$ będą rozwiązaniami równań, odpowiednio,

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad \dot{y} = g(t,y),$$

przy czym $x(0) = y(0)$. Wykaż, że dla $t \in]0,T[$ zachodzi

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{M}{L}\left(e^{Lt} - 1\right).$$

Wskazówka. Znajdź odpowiednią nierówność różniczkową spełnianą przez funkcję $|x(t) - y(t)|$ w punktach, gdzie nie zeruje się ona.

Zadanie 4. Mówimy, że funkcja $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest monotoniczna, jeśli

$$(x - y)\cdot(g(x) - g(y)) \leq 0 \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wykaż, że jeśli funkcja $f\colon [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciagła oraz $f(t,\cdot)$ jest monotoniczna dla każdego $t > 0$, to dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jedna funkcja $x\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}^n$ będąca rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Zadanie 5. (Całkowa nierówność Gronwalla.) Niech $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Wykaż, że jeśli funkcja $x \in C([0,T[)$ spełnia nierówność

$$x(t) \leq a + b\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \text{dla } t \in]0,T[, \qquad \text{to} \quad x(t) \leq ae^{bt} \quad \text{dla } t \in]0,T[.$$

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 6. Iteracje Picarda. Szacowanie czasu istnienia.

Zadanie 1. Rozważmy zagadnienie początkowe

(a) $\begin{cases} \dot{x} = t\exp(x) + x, \\ x(0) = 0. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x} - t, \\ x(0) = 1. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} = x^4 + t^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dot{x} = 4t^3x - t^2x^3 + t^2, \\ x(1) = 1. \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \dot{x} = t\sin x + 1 - x, \\ x(0) = 0. \end{cases}$

Znajdź dwie pierwsze iteracje Picarda dla tego zagadnienia. Wskaż jakikolwiek przedział, na którym iteracje zbiegają. Czy rozwiązanie zagadnienia istnieje globalnie? Zbadaj jego zachowanie na krańcach przedziału określoności.

Zadanie 2. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Funkcja $f\colon [-A, A] \times \overline{B^n_R(x_0)} \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła i lipschitzowska ze względu na drugą zmienną ze stałą L. Niech

$$M = \sup |f|, \qquad T = \min\left\{A, \tfrac{M}{R}, \tfrac{1}{L}\right\}.$$

Niech x_k będzie k-tą iteracją Picarda dla tego zagadnienia. Wykaż, że dla $t \in]-T, T[$,

$$|x(t) - x_k(t)| \leq \frac{ML^k|t|^{k+1}}{1 - L|t|}.$$

Zadanie 3. Niech $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie ciągła i lokalnie lipschitzowska ze względu na drugą zmienną. Wykaż, że jeśli istnieją $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że

$$x \cdot f(t, x) \leq a|x|^2 + b \qquad \text{dla } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

to każde rozwiązanie równania $\dot{x} = f(t, x)$ istnieje globalnie.

Zadanie 4. Dla $x_0 \in \mathbb{R}$ rozważmy zagadnienie

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - t, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Niech x_+ będzie kresem dolnym zbioru tych x_0, dla których rozwiązanie tego zagadnienia wybucha w skończonym czasie $t > 0$ do $+\infty$. Niech x_- będzie kresem górnym zbioru tych x_0, dla których rozwiązanie istnieje na całej półprostej $[0, +\infty[$ i zbiega do $-\infty$. Wykaż, że

(a) $0 < x_- \leq x_+ < +\infty$. (b) $1 - \frac{1}{e} \leq x_- \leq x_+ \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. (c) $x_- = x_+$.

Zbadaj zachowanie rozwiązania na krańcach przedziału określoności dla $x_0 = x_- = x_+$.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20. Seria 7. Proste układy równań 2×2. Portrety fazowe.

Zadanie 1. Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = \quad x + y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

Znajdź wszystkie punkty $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ takie, że rozwiązanie startujące z (x_0, y_0):

(a) jest okresowe,

(b) jest ograniczone w przód,

(c) jest ograniczone w tył,

(d) nie przecina prostej $y = 0$ dla $t < 0$.

Zadanie 2. Wykaż, że wszystkie rozwiązania układu

$$\begin{cases} \dot{x} = y - y^2 x, \\ \dot{y} = -y + x \end{cases}$$

są ograniczone w przód.

Zadanie 3. Niech $(x(t), y(t))$ będzie rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$

takim, że $y(0) \neq 0$. Wykaż, że rozwiązanie to jest globalne oraz

$$\lim_{t \to \pm\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

Zadanie 4. Znajdź wszystkie nieograniczone rozwiązania układu

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 3xy^2, \\ \dot{y} = 3x^2 y - y^3. \end{cases}$$

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 8. Równania zupełne. Czynniki całkujące.

Zadanie 1. Znajdź maksymalne rozwiązanie równania przechodzące przez $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Naszkicuj je.

(a) $\begin{cases} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0, \\ (x_0, y_0) = (1, 0). \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0, \\ (x_0, y_0) = (1, 1). \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0, \\ (x_0, y_0) = (1, 1). \end{cases}$

(d) $\begin{cases} (x^2 + y^2 - x)\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y = 0, \\ (x_0, y_0) = (0, 1). \end{cases}$ (e) $\begin{cases} (x^2 + y^2 + y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0, \\ (x_0, y_0) = (1, 0). \end{cases}$

(f) $\begin{cases} (2x + y^2)\mathrm{d}x + (2xy + 2y^3)\mathrm{d}y = 0, \\ (x_0, y_0) = (0, 1). \end{cases}$

Zadanie 2. Niech $\omega\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to (\mathbb{R}^2)^*$ będzie dana wzorem

$$\omega(x, y) = M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = -\frac{y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} + \frac{x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}.$$

Sprawdź, że $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Wykaż, że jeśli zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^2$ zawiera okrąg $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$, to nie istnieje funkcja $f \in C^1(U)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}f$.

Zadanie 3. Rozważmy równanie o gładkich współczynnikach

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0. \qquad (*)$$

Przypuśćmy, że $N \neq 0$ oraz $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$. Wykaż, że istnieje gładka funkcja $\mu = \mu(x)$ taka, że

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N).$$

Zadanie 4. Znajdź maksymalne rozwiązanie zagadnienia początkowego. Zbadaj jego zachowanie na krańcach przedziału określoności.

(a) $\begin{cases} 2xyy' = x - y^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} xy' = y - xy^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x^2y' = x - e^y, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x^2y' = \operatorname{tg} xy - xy, \\ y(1) = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$ (e) $\begin{cases} xy^2(xy' + y) = 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} (2xy + 2y^3)y' = -2x - y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 9. Całki pierwsze. Układ Lotki-Volterry.

Zadanie 1. Niech $\mathbb{R}^2_+$ oznacza zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0, y > 0\}$. Rozważmy układ równań Lotki-Volterry

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2xy, \\ \dot{y} = xy - y. \end{cases}$$

Wykaż, że jeśli $(x(t), y(t))$ jest maksymalnym rozwiązaniem układu z warunkiem początkowym $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+$, to

(a) $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2_+$ dopóki rozwiązanie istnieje,

(b) rozwiązanie jest ograniczone i istnieje globalnie,

(c) rozwiązanie jest okresowe.

Zadanie 2. Rozważmy wariant układu równań Lotki-Volterry z pojemnością

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x(1 - x) - 2xy, \\ \dot{y} = xy - y. \end{cases}$$

Wykaż, że jeśli $(x(t), y(t))$ jest maksymalnym rozwiązaniem układu z warunkiem początkowym $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+$, to

(a) $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2_+$ dopóki rozwiązanie istnieje,

(b) rozwiązanie jest ograniczone w przód,

(c) $\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = (1, 0)$,

(d) rozwiązanie nie istnieje globalnie.

Zadanie 3. Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 + 4y, \\ \dot{y} = x^3 - 4x. \end{cases}$$

W zależności od $y_0 \in \mathbb{R}$ zbadaj, czy maksymalne rozwiązanie układu przechodzące przez punkt $(0, y_0)$ jest

(a) ograniczone,

(b) okresowe.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 10. Układy równań liniowych o stałych współczynnikach.

Zadanie 1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oblicz

$$\text{(a) } e^A e^B, \qquad \text{(b) } e^B e^A, \qquad \text{(c) } e^{A+B}.$$

Zadanie 2. Wyznacz rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

dla

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań $\dot{x} = Ax$ dla

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c) } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wskaż wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^3$ takie, że przechodzące przez v rozwiązanie układu jest globalnie ograniczone. Wskaż wszystkie takie wektory, że przechodzące przez nie rozwiązanie jest ograniczone na $[0, +\infty[$.

Zadanie 4. Wykaż, że dla dowolnej macierzy kwadratowej A o współczynnikach rzeczywistych zachodzi $\sin^2 A + \cos^2 A = I$.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 11. Równania liniowe drugiego i wyższych rzędów.

Zadanie 1. Rozważmy równanie

$$\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

ze współczynnikami $\nu, \omega > 0$. Wyznacz wszystkie pary ν, ω takie, że rozwiązanie równania z warunkami początkowymi $x(0) = x_0 > 0$, $\dot{x}(0) = 0$ jest monotoniczne na $[0, +\infty[$.

Zadanie 2. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dla danej funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, rozważmy *zagadnienie brzegowe*

$$\begin{cases} \ddot{x} - x = f(t), \\ x(a) = x(b) = 0. \end{cases}$$

Wykaż, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie x tego zagadnienia na $[a,b]$. Wykaż, że przyporządkowanie $f \mapsto x$ definiuje ciągły operator liniowy

$$T\colon C([a,b]) \to C_0^2([a,b]),$$

gdzie $C_0^2([a,b])$ oznacza przestrzeń liniową $\{x \in C^2([a,b])\colon x(a) = x(b) = 0\}$ z normą $\|x\|_{C^2} = \sup |\ddot{x}|$. Wykaż, że T jest izomorfizmem.

Zadanie 3. Znajdź rozwiazanie ogólne równania

(a) $\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4} - x = 0$. (b) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{e^t}{t}$. (c) $\ddot{x} + x = \frac{1}{\sin t}$.
(d) $\ddot{x} + 4x = \operatorname{tg} t$. (e) $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = e^{4t}$. (f) $\ddot{x} + x = 4te^t$.
(g) $\ddot{x} + x = 4\sin t$. (h) $\ddot{x} + x = t\sin t$. (i) $\ddot{x} - x = 2e^t - t^2$.

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$$

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 12. Równania drugiego rzędu.

Zadanie 1. Niech x będzie globalnym rozwiązaniem równania

$$\ddot{x} + a(t)x = 0,$$

gdzie $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $\inf a > 0$. Wykaż, że x ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Zadanie 2. Niech $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem równania $\ddot{x} = -\sin x$ z warunkami początkowymi $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = y_0$. Niech $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0, 2\pi[$ będzie dana wzorem

$$\varphi(t) = x(t) \bmod 2\pi.$$

Znajdź wszystkie $y_0 \in \mathbb{R}$ takie, że φ nie jest okresowa.

Zadanie 3. Znajdź wszystkie rozwiązania równania $\ddot{x} = x^2$ określone na $[0, +\infty[$.

Zadanie 4. Wykaż, że istnieje nietrywialne (tj. $x \not\equiv 0$) rozwiązanie równania $\ddot{x} + \dot{x} = x^2$ określone na $[0, +\infty[$. Czy istnieje rozwiązanie tego równania określone na $[0, +\infty[$ takie, że $\dot{x}(0) > 0$?

Zadanie 5. Znajdź wszystkie $y_0 \in \mathbb{R}$ takie, że maksymalne rozwiązanie równania $\ddot{x} + \dot{x}^2 = x^2$ z warunkami początkowymi $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = y_0$ istnieje globalnie.

Zadanie 6. Niech $n \geq 2$, $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Rozważmy układ n równań drugiego rzedu

$$\ddot{x} = f(|x|)\frac{x}{|x|}.$$

Wykaż, że przez każdy punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ przechodzi okresowe rozwiązanie tego układu.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 13. Stabilność rozwiązań w sensie Lapunowa.

Zadanie 1. Zbadaj stabilność rozwiązania $x \equiv 0$ równania $\dot{x} = \frac{x}{1+t^2}$.

Zadanie 2. Wykaż, że rozwiązanie $x \equiv 0$ układu jednorodnych równań liniowych jest stabilne w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie rozwiązania tego układu są ograniczone dla $t \geq 0$. Czy jest ono wówczas również asymptotycznie stabilne?

Zadanie 3. Sprawdź, że wszystkie rozwiązania równania $\dot{x} = \sin^2 x$ sa ograniczone, ale rozwiązanie $x \equiv 0$ nie jest stabilne.

Zadanie 4. Zbadaj stabilność rozwiązania $(x, y) \equiv (0, 0)$ układu równań

(a) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + x^2y^2, \\ \dot{y} = x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x^3y. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = -2\sin y - x\exp x, \\ \dot{y} = x - \cos y. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = -x^2 - y^2, \\ \dot{y} = y - x^3. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$

Zadanie 5. Niech $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Rozważmy równanie

$$\dot{x} = \nabla^{\perp}\Phi(x) = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right).$$

Przypuśćmy, że x_0 jest ekstremum lokalnym Φ. Zbadaj stabilność rozwiązania $x \equiv x_0$.

Zadanie 6. Znajdź rozwiązania stałe równania

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0.$$

Zbadaj ich stabilność.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2019/20.
Seria 14. Zależność rozwiązania od parametru.

Zadanie 1. Rozważmy zagadnienie początkowe z parametrem $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = y + \mu(x + y^2), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Wyznacz $\frac{\partial y}{\partial \mu}\big|_{\mu=0}$ oraz $\frac{\partial^2 y}{\partial \mu^2}\big|_{\mu=0}$.

Zadanie 2. Rozważmy zagadnienie początkowe z parametrem $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = t + \mu x^2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Wyznacz $\frac{\partial x}{\partial \mu}\big|_{\mu=0}$. Niech $x_1(t, \mu) = x(t, 0) + \mu \frac{\partial x}{\partial \mu}(t, 0)$. Znajdź górne oszacowanie na różnicę $|x - x_1|$ dla $t \in [0, 1]$, $\mu \in [0, 1]$.

Zadanie 3. Rozważmy zagadnienie początkowe z parametrem $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu + x^4, \\ x(0) = \mu + 1. \end{cases}$$

Wyznacz $\frac{\partial x}{\partial \mu}\big|_{\mu=0}$.

Zadanie 4. Rozważmy zagadnienie początkowe z parametrem $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} = (1 + x)^2 - \mu x^2, \\ x(0) = \frac{1}{2}, \quad \dot{x}(0) = -1. \end{cases}$$

Wyznacz $\frac{\partial x}{\partial \mu}\big|_{\mu=1}$.