Rozwiązania zadań domowych (i nie tylko) z RRZ, semestr letni 2019/20.

Zadanie 3.2. Wykaż, że jeśli $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona, to istnieje dokładnie jedna liczba $x_0 \in \mathbb{R}$ taka, że zagadnienie

$$\begin{cases} \dot{x} = x + h(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ma ograniczone globalne rozwiązanie. Wykaż, że jeśli ponadto h jest okresowa, to rozwiązanie to jest okresowe.

Rozwiązanie. Jest to zagadnienie początkowe dla równania liniowego niejednorodnego, funkcja $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, więc istnieje dokładnie jedno, globalne rozwiązanie $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jest ono dane wzorem

$$x(t) = \left(x_0 + \int_0^t h(s)e^{-s}\mathrm{d}s\right) e^t.$$

Z ograniczoności h, $H := \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)| < +\infty$, więc

$$\left|\int_t^{+\infty} h(s)e^{-s}\mathrm{d}s\right| \leq H \int_t^{+\infty} e^{-s}\mathrm{d}s = e^{-t} \to 0 \quad \text{przy } t \to +\infty.$$

Wobec tego, całka nieoznaczona

$$I := \int_0^{+\infty} h(s)e^{-s}\mathrm{d}s$$

istnieje i jest skończona. Jeśli $x_0 + I \neq 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = (x_0 + I) \cdot (+\infty) = \pm\infty,$$

więc rozwiązanie x jest nieograniczone. Jeśli, przeciwnie, $x_0 = -I$, to

$$x(t) = -e^t \int_t^{+\infty} h(s)e^{-s}\mathrm{d}s,$$

$$|x(t)| = e^t \left|\int_t^{+\infty} h(s)e^{-s}\mathrm{d}s\right| \leq e^t \cdot H \int_t^{+\infty} e^{-s}\mathrm{d}s = e^t \cdot He^{-t} = H$$

dla $t \in \mathbb{R}$, więc rozwiązanie jest ograniczone.

Przypuśćmy teraz, że $x_0 = -I$ oraz ϑ jest okresem h. Wówczas, podstawiając $\sigma = s - \vartheta$

$$\begin{aligned} x(t+\vartheta) &= -e^{t+\vartheta} \int_{t+\vartheta}^{+\infty} h(s)e^{-s}\mathrm{d}s = -e^{t+\vartheta} \int_t^{+\infty} h(\sigma+\vartheta)e^{-\sigma-\vartheta}\mathrm{d}\sigma \\ &= -e^{t+\vartheta-\vartheta} \int_t^{+\infty} h(\sigma+\vartheta)e^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma = -e^t \int_t^{+\infty} h(\sigma)e^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma = x(t). \end{aligned}$$

$\square$

Zadanie 4.1(d). Wyznacz maksymalne rozwiązanie zagadnienia początkowego. Czy istnieje ono globalnie? Zbadaj jego zachowanie na krańcach przedziału określoności.

$$\begin{cases} \dot{x} = (1+x^2)\left(\operatorname{arctg} x + te^t\right), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Po podzieleniu obu stron równania przez $1 + x^2$ i podstawieniu $y = \operatorname{arctg} x$, dostajemy równanie liniowe niejednorodne na y

$$\dot{y} = y + te^t. \tag{$*$}$$

Rozwiązanie ogólne wersji jednorodnej tego równania to Ae^t, $A \in \mathbb{R}$. Rozwiązanie ogólne równania $(*)$ jest zatem postaci $y(t) = A(t)e^t$, gdzie funkcja A spełnia równanie $\dot{A}e^t = te^t$, a więc $A(t) = \frac{1}{2}t^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Po podstawieniu odwrotnym $y = \operatorname{arctg} x$,

$$\operatorname{arctg} x(t) = \left(\tfrac{1}{2}t^2 + C\right) e^t.$$

Wykorzystując warunek początkowy, $0 = \operatorname{arctg} 0 = Ce^0$, więc $C = 0$ i ostatecznie

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}t^2 e^t\right).$$

Rozwiązanie x istnieje dopóki wartości funkcji $g(t) := \frac{1}{2}t^2e^t$ mieszczą się w przedziale $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ i wybucha do $\pm\infty$ gdy (i o ile) wartości funkcji g zbliżają się do brzegów tego przedziału. Zbadajmy zachowanie funkcji g. Łatwo sprawdzamy, że $g(t) \geq 0$ dla $t \in \mathbb{R}$, w szczególności $g(t)$ nie zbliża się do $-\frac{\pi}{2}$. Ponadto,

$$\lim_{t\to-\infty} g(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty.$$

Różniczkujemy:

$$g'(t) = \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right) e^t = \tfrac{1}{2}t(t+2)e^t.$$

Stąd,

$$g'(t) = 0 \;\equiv\; t = 0 \vee t = -2, \qquad g'(t) > 0 \;\equiv\; t < -2 \vee t > 0,$$

więc g ma maksimum lokalne w $t = -2$ i minimum w $t = 0$ oraz jest ściśle monotoniczna na przedziałach wyznaczanych przez te punkty oraz $\pm\infty$. Ponieważ $g(-2) = 2e^{-2} < \frac{\pi}{2}$, funkcja g przyjmuje wartość $\frac{\pi}{2}$ tylko w jednym punkcie $t_* \in \mathbb{R}$, przy czym $t_* > 0$. Zatem maksymalny przedział istnienia rozwiązania to $]-\infty, t_*[$ oraz

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0, \qquad \lim_{t\to t_*} x(t) = +\infty.$$

Zadanie 4.4. Znajdź wszystkie maksymalne rozwiązania zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} 2x^3\, y' = y(2x^2 + y^2), \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Zbadaj ich zachowanie na krańcach przedziałów określoności.

Rozwiązanie. Po podzieleniu obu stron równania przez $2x^3$ dostajemy

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{x^2}\right),$$

jest to zatem równanie jednorodne.[1] Podstawmy

$$z = \frac{y}{x}, \qquad z' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(y' - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{x^2}\right) - \frac{y}{x}\right).$$

Ostatecznie

$$z' = \frac{z^3}{2x}. \tag{1}$$

Jest to równanie o rozdzielonych zmiennych. Jedno z rozwiązań tego równania to $z \equiv 0$, co daje po powrocie do oryginalnych zmiennych $y \equiv 0$. To rozwiazanie nie spełnia warunku początkowego $y(1) = 1$. Podzieliwszy równanie (1) przez z^3, dostajemy:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2z^2}\right) = \frac{z'}{z^3} = \frac{1}{2x},$$

stąd $-\frac{1}{2z^2} = \frac{1}{2}\ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$. Równoważnie, $\frac{1}{z^2} = C - \ln|x|$, $C \in \mathbb{R}$. Wracając do oryginalnych zmiennych,

$$y^2 = \frac{x^2}{C - \ln|x|}. \tag{2}$$

Z warunku początkowego dostajemy $1 = \frac{1}{C - \ln 1}$, zatem $C = 1$. W otoczeniu warunku początkowego $x > 0$, $y > 0$, więc rozwiązanie jest tam dane wzorem

$$y(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \ln x}}.$$

Gdy $x \to e^-$, $y(x) \to +\infty$ i rozwiązanie przestaje istnieć. Gdy x osiąga 0 (gdzie funkcja ln ma osobliwość), wszystkie rachunki przeprowadzone począwszy od podzielenia przez x^3 przestają mieć sens, a równanie przestaje spełniać założenia tw. Picarda-Lindelöfa. Zbadajmy zachowanie rozwiązania przy $x \to 0^+$. Mamy

$$y(x) \to \left[\frac{0}{+\infty}\right] = 0,$$

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \ln x}}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1 - \ln x}\right) \to \left[\frac{1}{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{+\infty}\right)\right] = 0,$$

zatem rozwiązanie może dać się przedłużyć. Wykorzystując wynik uprzednich rachunków (2), wiemy że wszystkie rozwiązania wyjściowego równania na półprostej $\{x < 0\}$ są dane jednym z wzorów

$$y_C^{\pm}(x) = \frac{\pm x}{\sqrt{C - \ln(-x)}}, \; C \in \mathbb{R} \quad \text{lub} \quad y(x) = 0.$$

[1] Jest to również równanie Bernoulliego. Wybór sposobu rozwiązywania nie ma znaczenia dla wyniku, o ile nie popełni się błędów obliczeniowych i poprawnie zinterpretuje wyniki.

Każda z funkcji $y_C^{\pm}$ spełnia

$$\lim_{x\to 0^-} y_C^{\pm}(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^-} (y_C^{\pm})'(x) = 0,$$

co łatwo sprawdzić jak wyżej, zatem jest dobrym przedłużeniem naszego rozwiązania. Otrzymane rozwiązanie wybucha gdy x osiąga taką wartość, że $C - \ln(-x) = 0$, a więc dla $x = -e^C$. Zatem wszystkie maksymalne rozwiązania wyjściowego zagadnienia początkowego to

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-\ln x}} & \text{dla } x \in]0, e[, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ \frac{\pm x}{\sqrt{C-\ln x}} & \text{dla } x \in]-e^C, 0[, \end{cases} \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad y(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-\ln x}} & \text{dla } x \in]0, e[, \\ 0 & \text{dla } x \in]-\infty, 0]. \end{cases}$$

Zadanie 5.3. Niech $T > 0$. Funkcja $f\colon [0, T[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła i spełnia warunek Lipschitza ze względu na drugą zmienną ze stałą $L > 0$, funkcja $g\colon [0, T[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła. Przypuśćmy, że

$$\sup_{t\in[0,T[,\ x\in\mathbb{R}^n} |f(t, x) - g(t, x)| = M < +\infty.$$

Niech ponadto funkcje $x, y \in C^1([0, T[, \mathbb{R}^n)$ będą rozwiązaniami równań, odpowiednio,

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad \dot{y} = g(t, y),$$

przy czym $x(0) = y(0)$. Wykaż, że dla $t \in]0, T[$ zachodzi

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{M}{L}\left(e^{Lt} - 1\right).$$

Rozwiązanie (sposób 1). Korzystając z faktu, że $|v|^2 = v \cdot v$ dla $v \in \mathbb{R}^n$, mamy w chwilach $t \in]0, T[$ takich, że $x(t) \neq y(t)$,

$$|x - y|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x - y| = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x - y|^2 = (x - y)\cdot(\dot{x} - \dot{y}).$$

Stąd,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x - y| = \frac{x - y}{|x - y|}\cdot(\dot{x} - \dot{y}) \leq |\dot{x} - \dot{y}|.$$

Z równań spełnianych przez x, y oraz założeń o funkcjach f, g,

$$|\dot{x} - \dot{y}| = |f(t, x) - g(t, y)| \leq |f(t, x) - f(t, y)| + |f(t, y) - g(t, y)| \leq L|x - y| + M. \qquad (*)$$

Łącząc powyższe dwie nierówności, dostajemy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x - y| \leq L|x - y| + M.$$

Po wymnożeniu obu stron przez e^{-Lt},

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|x - y|e^{-Lt}\right) \leq Me^{-Lt}. \qquad (**)$$

Ustalmy teraz dowolną chwilę $t \in]0, T[$ taką, że $x(t) \neq y(t)$. Niech $t_0 = \sup\{s \in]0, t[: x(s) = y(s)\}$. Całkując nierówność $(**)$ na przedziale $[t_0, t]$, dostajemy[2]

$$|x(t) - y(t)|e^{-Lt} \leq \frac{M}{L}\left(e^{-Lt_0} - e^{-Lt}\right) \leq \frac{M}{L}\left(1 - e^{-Lt}\right).$$

Po przemnożeniu obu stron powyższej nierówności przez e^{Lt} dostajemy tezę.

Rozwiązanie (sposób 2). Ten sposób omija techiczne przeszkody związane z nierózniczkowalnością funkcji $w \mapsto |w|$ przy $w = 0$, angażując za to całkową nierówność Gronwalla.

Zauważmy, że

$$|x(t) - y(t)| = \left|\int_0^t \dot{x} - \dot{y}\right| \leq \int_0^t |\dot{x} - \dot{y}|. \tag{$***$}$$

Łącząc tę nierówność z nierównością $(*)$, dostajemy

$$|\dot{x} - \dot{y}| \leq M + L\int_0^t |\dot{x} - \dot{y}|.$$

Zatem, wykorzystując lemat Gronwalla (patrz zadanie 5.5),

$$|\dot{x} - \dot{y}| \leq Me^{Lt}.$$

Podstawiając tę nierówność do prawej strony $(***)$ i obliczając całkę, dostajemy tezę.

Zadanie 6.1(c). Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 + t^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Znajdź dwie pierwsze iteracje Picarda dla tego zagadnienia. Wskaż jakikolwiek przedział, na którym iteracje zbiegają. Czy rozwiązanie zagadnienia istnieje globalnie? Zbadaj jego zachowanie na krańcach przedziału określoności.

Rozwiązanie. Oznaczmy $x_0 = 1$. Obliczmy dwie pierwsze iteracje Picarda:[3]

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t x_0^4 + s^2 \mathrm{d}s = 1 + t + \tfrac{1}{3}t^3,$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = x_0 + \int_0^t x_1(s)^4 + s^2 \mathrm{d}s &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \tfrac{1}{3}s^3\right)^4 + s^2 \mathrm{d}s \\ &= 1 + \int_0^t \tfrac{s^{12}}{81} + \tfrac{4s^{10}}{27} + \tfrac{4s^9}{27} + \tfrac{2s^8}{3} + \tfrac{4s^7}{3} + 2s^6 + 4s^5 + 5s^4 + \tfrac{16s^3}{3} + 7s^2 + 4s + 1 \mathrm{d}s \\ &= \tfrac{t^{13}}{1053} + \tfrac{4t^{11}}{297} + \tfrac{2t^{10}}{135} + \tfrac{2t^9}{27} + \tfrac{t^8}{6} + \tfrac{2t^7}{7} + \tfrac{2t^6}{3} + t^5 + \tfrac{4t^4}{3} + \tfrac{7t^3}{3} + 2t^2 + t + 1. \end{aligned}$$

[2] Lewa strona nierówności $(**)$ nie jest dobrze zdefiniowana w t_0. Ten techniczny problem można obejść np. całkując na przedziale $[\tau, t]$, $\tau > t_0$ i przechodząc do granicy $\tau \to t_0^+$.

[3] Bardzo przepraszam za ten fragment polecenia, nie przeliczyłem tego wcześniej.

Prawa strona rozważanego równania jest gładką funkcją na całej płaszczyźnie (t,x), możemy więc obciąć ją na potrzeby zastosowania tw. Picarda-Lindelöfa do dowolnego prostokąta. Przyjmijmy $A=1, R=1$. Niech $\overline{f}$ oznacza prawą stronę równania ($\overline{f}(t,x)=x^4+t^2$) obciętą do zbioru $[-A,A]\times[x_0-R,x_0+R]=[-1,1]\times[0,2]$. Wówczas

$$M := \max|\overline{f}| = 2^4+1=17, \qquad L := \max\left|\tfrac{\partial\overline{f}}{\partial x}\right| = 4\cdot 2^3 = 32.$$

Iteracje Picarda zbiegają niemal jednostajnie na przedziale $]-T_*,T_*[$, gdzie

$$T_* = \min\left\{A, \tfrac{R}{M}, \tfrac{1}{L}\right\} = \min\left\{1, \tfrac{1}{17}, \tfrac{1}{32}\right\} = \tfrac{1}{32}.$$

Zauważmy, że rozwiązanie spełnia nierówność różniczkową

$$\dot{x} \geq x^4,$$

a więc

$$-\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{x^3} = \frac{\dot{x}}{x^4} \geq 1.$$

Całkując obie strony na przedziale $[0,t]$ dostajemy

$$1-\frac{1}{x^3(t)} \geq 3t.$$

Zatem, dopóki rozwiązanie istnieje,

$$x(t) \geq \frac{1}{\sqrt[3]{1-3t}}.$$

Wynika stąd, że najpóźniej przy $t=\frac{1}{3}$ rozwiązanie wybucha do $+\infty$ — w szczególności nie istnieje globalnie.

Aby zbadać zachowanie na drugim krańcu przedziału określoności, zauważmy, że

$$\dot{x} \geq t^2.$$

Całkując tę nierówność na przedziale $[t,0]$ ($t<0$), dostajemy

$$1-x(t) \geq \tfrac{1}{3}t^3,$$

czyli

$$x(t) \leq 1-\tfrac{1}{3}t^3.$$

Wobec tego, rozwiązanie zbiega do $-\infty$ na lewym końcu przedziału określoności. W szczególności, istnieje $t_0<0$ takie, że $x(t_0)=-1$. Wykorzystując ten fakt i powtarzając rozumowanie z poprzedniej części rozwiązania, można wykazać, że ten lewy koniec jest skończony, tj. rozwiązanie wybucha do $-\infty$ dla ujemnych czasów.

Zadanie 7.4. Znajdź wszystkie nieograniczone rozwiązania układu

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 3xy^2, \\ \dot{y} = 3x^2y - y^3. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli $y(t) = 0$ w pewnej chwili $t \in \mathbb{R}$, to w tejże chwili $\dot{y} = 0$. Dlatego można się spodziewać istnienia rozwiązań postaci $(x(t), 0)$, gdzie x spełnia równanie $\dot{x} = x^3$. Jego wszystkie rozwiązania to

$$x_A(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{A - 2t}}, \quad A \in \mathbb{R} \qquad \text{oraz} \qquad x_\infty \equiv 0.$$

Rozwiązanie x_A, $A \in \mathbb{R}$ istnieje na przedziale $]-\infty, \frac{A}{2}[$ i wybucha w $\frac{A}{2}$ do $\pm\infty$, więc jest nieograniczone. Analogicznie możemy pokazać, że istnieją też nieograniczone rozwiązania postaci $(0, y_A)$, $A \in \mathbb{R}$, gdzie

$$y_A(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{A + 2t}}.$$

Prawa strona badanego układu równań jest lokalnie lipschitzowska, zatem dzięki twierdzeniu o lokalnej jednoznaczności wiemy, że znaleźliśmy wszystkie rozwiązania przechodzące przez proste $\{x = 0\}$ oraz $\{y = 0\}$.

Wykażemy następnie, że wszystkie rozwiązania przechodzące przez punkt należący do wnętrza którejś z ćwiartek układu współrzędnych są ograniczone. W tym celu wykorzystamy współrzędne biegunowe:

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) = \frac{1}{r}(x^4 - y^4) = \frac{1}{r}(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = r^3(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^3 \cos 2\varphi, \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{r^2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{r^2}(2x^3y + 2xy^3) = 2xy = 2r^2 \sin\varphi\cos\varphi = r^2 \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Przypuśćmy, że rozwiązanie przechodzi przez punkt należący do wnętrza pierwszej ćwiartki $I = \{x > 0, y > 0\}$. Z poprzedniego akapitu wynika, że nie opuści ono I przez cały czas swojego istnienia, bo nie może przeciąć osi układu współrzędnych. Ponieważ $\dot{\varphi} > 0$ na I, obraz rozwiązania można opisać krzywą $r = r(\varphi)$. Krzywa ta spełnia równanie o rozdzielonych zmiennych

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = r \operatorname{ctg} 2\varphi.$$

Wszystkie rozwiązania tego równania w obszarze I są postaci

$$r_A(\varphi) = A\sqrt{\sin 2\varphi}, \quad A > 0.$$

Ponieważ $r_A \leq A$, wszystkie te krzywe są ograniczone, a zatem wszystkie rozwiązania badanego układu przechodzące przez punkt z I są ograniczone. Analogicznie można pokazać, że rozwiązania przechodzące przez punkt z wnętrza pozostałych ćwiartek są ograniczone. □

Zadanie 8.4(f). Znajdź maksymalne rozwiązanie zagadnienia początkowego. Zbadaj jego zachowanie na krańcach przedziału określoności.

$$\begin{cases} (2xy+2y^3)y' = -2x - y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Wykres rozwiązania zawiera się w krzywej spełniającej równanie

$$N(x,y)\mathrm{d}y + M(x,y)\mathrm{d}x = (2xy+2y^3)\mathrm{d}y + (2x+y^2)\mathrm{d}x = 0,$$

przy czym $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, więc jest to równanie zupełne. Łatwo sprawdzić, że lewa strona jest różniczką funkcji $F(x,y) = \frac{1}{2}y^4 + xy^2 + x^2$. Biorąc pod uwagę warunek początkowy, wykres rozwiązania badanego zagadnienia początkowego zawiera się w pozomicy

$$\frac{1}{2}y^4 + xy^2 + x^2 = \frac{1}{2}.$$

Równoważnie,

$$(y^2+x)^2 + x^2 = y^4 + 2xy^2 + 2x^2 = 1,$$

więc

$$y^2 + x = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Biorąc pod uwagę warunek początkowy, prawidłowy znak to $+$. Pierwiastkując jeszcze raz, również uwzględniając warunek początkowy, dostajemy

$$y(x) = \sqrt{\sqrt{1-x^2} - x}.$$

Ten wzór zadaje rozwiązanie dopóki

$$1 - x^2 > 0, \quad \sqrt{1-x^2} - x > 0,$$

równoważnie

$$|x| < 1, \quad x \le 0 \ \vee\ x^2 < 1 - x^2 \qquad \equiv \qquad x \in \left]-1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right[.$$

Na brzegach tego przedziału mamy

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = 1, \qquad \lim_{x\to \frac{1}{\sqrt{2}}^-} y(x) = 0.$$

W punktach $(-1,1)$ i $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $N=0$, $M\neq 0$. Z równania możemy więc sprawdzić, że na brzegach przedziału $\left]-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ pochodna rozwiązania wybucha do $\pm\infty$. Jest to zatem maksymalny przedział istnienia rozwiązania.

Zadanie 9.3. Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} \dot{x} = y^3 + 4y, \\ \dot{y} = x^3 - 4x. \end{cases}$$

W zależności od $y_0 \in \mathbb{R}$ zbadaj, czy maksymalne rozwiązanie układu przechodzące przez punkt $(0, y_0)$ jest

(a) ograniczone,

(b) okresowe.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że jedyne punkty w których prawa strona układu równań się zeruje to $(0,0)$ oraz $(\pm 2, 0)$. Wymnażając równania na krzyż, dostajemy

$$(x^3 - 4x)\dot{x} = (y^3 + 4y)\dot{y},$$

równoważnie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y^4 + 8y^2 - x^4 + 8x^2\right) = 0.$$

zatem funkcja

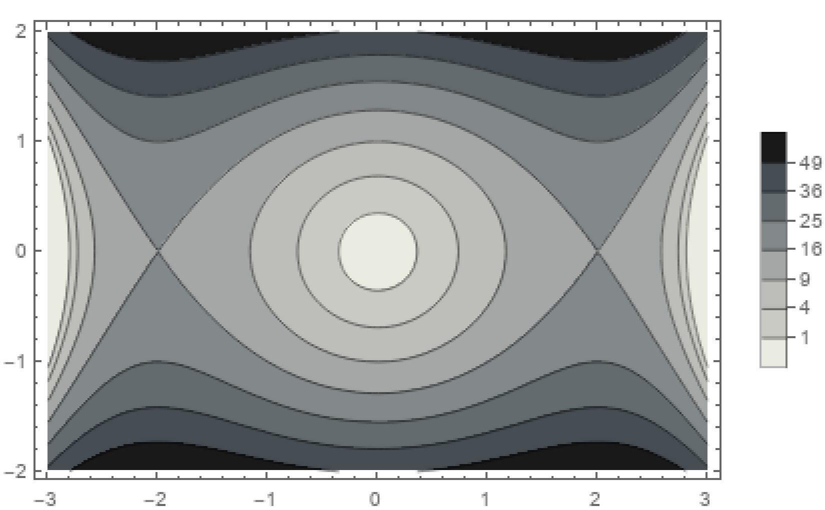
$$F(x,y) = y^4 + 8y^2 - x^4 + 8x^2 = (y^2+4)^2 - (x^2-4)^2$$

jest całką pierwszą układu równań (jest stała na rozwiązaniach). Jeśli poziomica $F(x,y) = A$ zawiera punkt postaci $(0, y_0)$, to $A = y_0^4 + 8y_0^2 \geq 0$. Równanie $F(x,y) = A$ możemy przepisać w postaci

$$(y^2+4)^2 = A + (x^2-4)^2.$$

Pierwiastkując stronami, otrzymujemy

$$y^2 = \sqrt{A + (x^2-4)^2} - 4. \tag{$*$}$$



Rysunek 1: Wykres konturowy funkcji F.

Rozważmy cztery przypadki.

I. $A > 16$. W tym przypadku prawa strona $(*)$ jest ściśle dodatnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc dla każdego x istnieją dwa rozwiązania równania $(*)$:

$$y = \pm\sqrt{\sqrt{A + (x^2 - 4)^2} - 4}.$$

Oznacza to, że każda poziomica o $A > 16$ ma dwie nieograniczone spójne składowe. Ponieważ jedyne punkty, gdzie $\dot{x} = \dot{y} = 0$ leżą na osi $\{y = 0\}$, to szybkość przesuwania się rozwiązania wzdłuż poziomicy jest lokalnie (a tak naprawdę globalnie) oddzielona od 0. Zatem każde rozwiązanie zawierające się w poziomicy o $A > 16$ jest nieograniczone.

II. $A = 16$. W tym przypadku prawa strona $(*)$ jest nieujemna, ale ma dwa miejsca zerowe $x = \pm 2$. Ponieważ odpowiadające im punkty $(\pm 2, 0)$ są punktami stałymi układu równań, inne rozwiązania nie mogą ich osiągnąć ani przekroczyć. Wobec tego rozwiązania przechodzące przez punkt $(0, y_0)$ taki, że $y_0^4 + 8y_0^2 = A = 16$ są uwięzione w odcinkach poziomicy pomiędzy punktami $(\pm 2, 0)$, a więc są ograniczone. Nie mogą być okresowe, choćby dlatego, że jedno z nich jest uwiezione w obszarze $\{y > 0\}$, gdzie $\dot{x} > 0$, a drugie w $\{y < 0\}$, gdzie $\dot{x} < 0$.

III. $A \in]0, 16[$. Rozwiązanie y równania $(*)$ istnieje tylko, gdy jego prawa strona jest nieujemna, równoważnie

$$A + (x^2 - 4)^2 \geq 16 \quad \equiv \quad |x^2 - 4| \geq \sqrt{16 - A} \quad \equiv \quad x^2 \geq 4 + \sqrt{16 - A} \vee x^2 \leq 4 - \sqrt{16 - A}.$$

Oznacza to, że poziomica o $A \in]0, 16[$ rozkłada się na trzy spójne składowe (patrz rysunek). Oś $\{x = 0\}$ przecina tylko ta z nich, na której $x^2 \leq 4 - \sqrt{16 - A}$, nazwijmy ją S. Jako ograniczona spójna składowa poziomicy gładkiej funkcji $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, która nie zawiera punktów krytycznych F, S jest dyfeomorficzna z okręgiem. Ponieważ S nie zawiera punktów stałych układu równań, szybkość przesuwania się rozwiązań po niej jest oddzielona od 0. Stąd, rozwiązania przechodzące przez punkt $(0, y_0)$ taki, że $y_0^4 + 8y_0^2 = A \in]0, 16[$ są ograniczone i okresowe.

IV. $A = 0$. Składowa poziomicy o $A = 0$ przecinająca oś $\{x = 0\}$ składa się z jednego punktu $(0, 0)$, który jest punktem stałym układu równań, a więc jest rozwiązaniem ograniczonym i okresowym.

Zauważmy na koniec, że wartość A dla poziomicy funkcji F zawierającej punkt $(0, y_0)$, czyli $y_0^4 + 8y_0^2$, zależy monotonicznie od $|y_0|$. Aby znaleźć wartość graniczną $|y_0|$, rozwiążemy równanie

$$y_0^4 + 8y_0^2 = 16 \quad \equiv \quad (y_0^2 + 4)^2 = 32 \quad \equiv \quad y_0^2 = 4\sqrt{2} - 4 \quad \equiv \quad |y_0| = 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Ostatecznie:

- jeśli $|y_0| > 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}$, to rozwiązanie jest nieograniczone (i nieokresowe),
- jeśli $|y_0| = 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}$, to rozwiązanie jest ograniczone, ale nie jest okresowe,
- jeśli $|y_0| < 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}$, to rozwiązanie jest ograniczone i okresowe.

Zadanie 10.3(a). Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań $\dot{x} = Ax$ dla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wskaż wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^3$ takie, że przechodzące przez v rozwiązanie układu jest globalnie ograniczone. Wskaż wszystkie takie wektory, że przechodzące przez nie rozwiązanie jest ograniczone na $[0, +\infty[$.

Rozwiązanie. Wyznaczamy wielomian charakterystyczny macierzy A:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = (1 + \lambda^2)(1 - \lambda).$$

Zatem wartości własne macierzy A to $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = 1$. Następnie wyznaczamy jądra macierzy $A - \lambda_k I$, $k = 1, 2, 3$, otrzymując wektory własne[4]

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wobec tego, rozwiązanie ogólne równania $\dot{x} = Ax$ nad $\mathbb{C}$ to

$$x(t) = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix} e^{it} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix} e^{-it} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}. \tag{$*$}$$

Można to wywnioskować na co najmniej dwa sposoby. Powinny one być znane z wykładu, ale umieszczam je tutaj dla kompletności.

Po pierwsze, jeśli λ_k, v_k jest parą własną macierzy A, to $x_k(t) = v_k e^{\lambda_k t}$ jest rozwiązaniem, bo

$$\dot{x}_k = \lambda_k v_k e^{\lambda_k t} = A v_k e^{\lambda_k t} = A x_k.$$

Z liniowości równania, $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ też jest rozwiązaniem. Ponieważ wektory $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ są liniowo niezależne dla każdego $t \in \mathbb{R}$, to rozpinają $\mathbb{C}^3$, więc wszystkie rozwiązania są tej postaci (z jednoznaczności dla zagadnienia początkowego).

Z drugiej strony, wiemy że $A = CDC^{-1}$, gdzie

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ \frac{-1+i}{2} & \frac{-1-i}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podstawiając tę tożsamość do wzoru $x(t) = \exp(tA)x_0$, dostajemy

$$x(t) = C \exp(tD) C^{-1} x_0.$$

[4] Jeśli liczba zespolona λ jest wartością własną macierzy o współczynnikach rzeczywistych, to jej sprzężenie $\overline{\lambda}$ również jest wartością własną. Co więcej, jeśli v jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ, to jego sprzężenie po współrzędnych $\overline{v}$ jest wektorem własnym odpowiadającym $\overline{\lambda}$. Te fakty z algebry liniowej łatwo sprawdzić.

Ponieważ C jest izomorfizmem, w obrazie przekształcenia C^{-1} są wszystkie wektory z $\mathbb{C}^3$. Zatem rozwiązanie ogólne równania to

$$x(t) = C\exp(tD)[a_1 \ a_2 \ a_3]^T, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}.$$

Wymnażając macierze po prawej stronie tego równania otrzymujemy wzór $(*)$.

Znajdźmy teraz rozwiązanie ogólne równania nad $\mathbb{R}$. Zwróćmy uwagę, że

$$a_1v_1 + a_2v_2 = a_1v_1 + a_2\overline{v}_1 = a_1v_1 + \overline{a}_1\overline{v}_1 + (a_2 - \overline{a}_1)\overline{v}_1 = 2\mathrm{Re}(a_1v_1) + (a_2 - \overline{a}_1)\overline{v}_1.$$

Ponieważ $\overline{v}_1$ nie jest[5] wielokrotnością zespoloną wektora z $\mathbb{R}^3$, $a_1v_1 + a_2v_2 \in \mathbb{R}^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2 = \overline{a}_1$. Oznaczmy $a_1 = \frac{1}{2}(b_1 - ib_2)$, $v_1 = w_1 + iw_2$, gdzie $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$. Wówczas

$$\begin{aligned} a_1v_1e^{it} + a_2v_2e^{-it} = a_1v_1e^{it} + \overline{a_1v_1e^{it}} = 2\mathrm{Re}(a_1v_1e^{it}) \\ = \mathrm{Re}\left((b_1 - ib_2)(w_1 + iw_2)(\cos t + i\sin t)\right) \\ = b_1(w_1\cos t - w_2\sin t) + b_2(w_1\sin t + w_2\cos t). \end{aligned}$$

Zatem, ogólne rozwiązanie równania to

$$x(t) = b_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\sin t\right) + b_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\cos t\right) + b_3\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^t, \quad b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

Jak łatwo stąd wywnioskować, wszystkie wektory takie, że przechodzące przez nie rozwiązania równania są ograniczone (równoważnie, ograniczone na $[0, +\infty[$) to

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Są to wszystkie kombinacje liniowe nad $\mathbb{R}$ części rzeczywistej i urojonej wektora v_1.

[5] Wektor własny macierzy o współczynnikach rzeczywistych odpowiadający nierzeczywistej wartości własnej nie może być wielokrotnością zespoloną wektora z $\mathbb{R}^3$. Dlaczego?