Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2018/19.
Seria 1. Rozwiązania RRZ. Krzywe całkowe równań pierwszego rzędu.

Zadanie 1. Sprawdź, czy funkcja $x(t)$ jest rozwiązaniem danego równania różniczkowego.

(a) $x(t) = c_1 \cos(5t) + c_2 5t \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}), \qquad \ddot{x} + 24x = 0.$

(b) $x(t) = \operatorname{tg} t, \qquad \dot{x} = 1 + x^2.$

(c) $x(t) = \frac{\sin t}{t}, \qquad t\dot{x} + x = \cos t.$

(d) $x(t) = 2 + c\sqrt{1 - t^2} \quad (c \in \mathbb{R}), \qquad (1 - t^2)\dot{x} + tx = 2t.$

Zadanie 2. Wyznaczywszy kilka izoklin, naszkicuj pole kierunków i krzywe całkowe danego równania. Wyznacz obszar, gdzie rozwiązania równania są funkcjami wypukłymi/wklęsłymi (o ile istnieją). Wyznacz punkty, w których rozwiązania mają ekstrema lokalne.

(a) $\dot{x} = x - t^2.$ (b) $\dot{x} = \dfrac{x^2 + t^2}{2} - 1.$ (c) $x\dot{x} + t = 0.$

(d) $\dot{x} = \dfrac{x - 3t}{t + 3x}.$ (e) $\dot{x} = x(2 - x).$ (f) $(1 + x^2)\dot{x} = x - t.$

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2018/19.
Seria 2. Zagadnienia początkowe. Równania o rozdzielonych zmiennych.

Zadanie 1. Mówimy, że herbata jest *pijalna*, jeśli jej temperatura jest nie mniejsza niż 30°C. W pokoju, w którym panuje temperatura 20°C, w chwili $t = 0$ znajduje się kubek herbaty o temperaturze 100°C. Po 10 minutach herbata ma 60°C. Przez ile minut herbata będzie jeszcze pijalna? Przyjmij, zgodnie z *prawem Newtona*, że tempo stygnięcia ciała jest proporcjonalne do różnicy między jego temperaturą i temperaturą otoczenia.

Zadanie 2. Znajdź maksymalne rozwiązania następujących zagadnień początkowych.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = \exp(t+x), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1+x^2}{t}, \\ x(1) = x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\frac{x}{t}}, \\ x(0) = x_0 \geq 0. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} xy + (x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$ (e) $\begin{cases} e^{-s}\left(1 + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = 1, \\ s(0) = s_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \dot{x} = \cos(t+x), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} (x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$ (h) $\begin{cases} \dot{x} = 3\sqrt[3]{x^2}, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$ (i) $\begin{cases} 2x^2yy' + 2 = y^2, \\ y(1) = y_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Zadanie 3. Znajdź kształt zwierciadła, które skupia padające na nie równoległe promienie światła w punkt.

Zadanie 4. Na ciało o masie m upuszczone w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu g działa siła oporu powietrza $F_p = -\alpha v^2$, gdzie v jest szybkością ciała w danym momencie, a α jest nieznaną stałą. Znajdź zależność między maksymalną szybkością v_{max}, jaką może rozwinąć ciało, a współczynnikiem α. Po jakim czasie od upuszczenia ciało rozwinie szybkość $\frac{1}{2}v_{max}$?

Zadanie 5. Plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób z szybkością proporcjonalną do liczby osób, które już ją słyszały, oraz do liczby osób, które jej jeszcze nie słyszały. Przypuśćmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu zna ją już 10 osób. Po ilu dniach plotkę będzie znało 500 osób? Po ilu dniach będzie ją znało 990 osób?

Zadanie 6. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągła spełniającą warunek $f(0) > 0$. Przypuśćmy, że funkcja $x(t)$ klasy C^1 określona na całej prostej $\mathbb{R}$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$x' - f(x) = t^2, \quad x(0) = x_0 \geq 0.$$

Wykaż, że $x(t) > 0$ dla wszystkich $t > 0$. Czy ta nierówność musi zachodzić także dla wszystkich $t < 0$?

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2018/19.
Seria 3. Równania liniowe. Równania Bernoulliego/Riccatiego.

Zadanie 1. Znajdź rozwiązania ogólne poniższych równań.

(a) $xy' + 2y = 3x$. (b) $y' \sin x - y = 1 - \cos x$. (c) $\dot{x} + tx = t$.

(d) $\dot{x} + x\cos t = 0$. (e) $\dot{x} + x = te^t$. (f) $\dot{x} + \dfrac{2t}{1+t^2}x = \dfrac{1}{1+t^2}$.

Zadanie 2. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ równanie $\dot{x} + ax = 1$ ma ograniczone rozwiązanie?

Zadanie 3. Przypuśćmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i ograniczona. Wykaż, że równanie

$$y' + y = f(x)$$

ma dokładnie jedno ograniczone maksymalne rozwiązanie. Wykaż, że jeśli f jest okresowa, to rozwiązanie to również jest okresowe.

Zadanie 4. Przypuśćmy, że funkcja $f\colon [0,\infty[\times\mathbb{R} \to [0,\infty[$ jest ciągła i ograniczona, $K > 0$ oraz $0 < x_0 < K$. Wykaż, że jeśli $x\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x)(K-x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

to $0 < x(t) < K$ dla $t > 0$. Czy założenie, że f jest ograniczona jest konieczne?

Zadanie 5. Znajdź rozwiązania ogólne poniższych równań.

(a) $t\dot{x} + x = x^2 \ln t$. (b) $y' = xy + x^3y^3$. (c) $2\dot{x} - x = \dfrac{1}{x}e^t$.

Zadanie 6. Znajdź rozwiązania ogólne poniższych równań.

(a) $\dot{x} - 2tx + x^2 = 5 - t^2$. (b) $\dot{x} + 2xe^t - x^2 = e^{2t} + e^t$. (c) $y' + y^2 + \dfrac{1}{4x^2} = 0$.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2018/19.
Seria 6. Redukcja wymiaru dla układów równań 2×2. Portrety fazowe.

Zadanie 1. Rozważmy układ równań

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -2y + x. \end{cases}$$

Wykaż, że dla $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ istnieje dokładnie jedno globalne rozwiązanie układu z warunkiem początkowym $(x, y)(0) = (x_0, y_0)$. Naszkicuj portret fazowy układu. Znajdź krzywe fazowe.

Zadanie 2. Rozważmy układ równań

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} = 2x - 2xy, \\ \dot{y} = xy - y. \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \dot{x} = 2x(1 - x) - 2xy, \\ \dot{y} = xy - y. \end{cases}$$

Oznaczmy $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0, y > 0\}$. Wykaż, że dla $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+$ lokalnie istnieje jednoznaczne rozwiązanie układu z warunkiem początkowym $(x, y)(0) = (x_0, y_0)$. Wykaż, że rozwiązanie to spełnia warunek $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ dopóki istnieje. Naszkicuj portret fazowy układu na $\mathbb{R}^2_+$. Znajdź krzywe fazowe. W przypadku (a) wykaż, że rozwiązania układu są ograniczone i istnieją globalnie. W przypadku (b) wykaż, że maksymalna dziedzina rozwiązania jest postaci $]t_*, +\infty[$, $t_* \in \mathbb{R}$.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2018/19.
Seria 7. Metoda kolejnych przybliżeń Picarda.

Zadanie 1. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} = x, \\ x(0) = 1. \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \dot{x} = x + t, \\ x(0) = 0. \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Znajdź n-tą iterację Picarda dla tego zagadnienia, $n \in \mathbb{N}$. Zbadaj zbieżność iteracji.

Zadanie 2. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Znajdź dwie pierwsze iteracje Picarda dla tego zagadnienia. Wyznacz maksymalny przedział na którym iteracje zbiegają.

Zadanie 3. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Funkcja $f\colon [-a, a] \times U \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła i lipschitzowska ze względu na drugą zmienną ze stałą L. Niech $K = \sup_{t \in [-a,a]} |f(t, x_0)|$. Niech x_k będzie k-tą iteracją Picarda dla tego zagadnienia. Wykaż, że o ile rozwiązanie x zagadnienia istnieje dla $t \in]-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}[$, to

$$|x(t) - x_k(t)| \leq \frac{K L^k |t|^{k+1}}{1 - L|t|}.$$

Zadanie 4. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} = t\exp(x) + t, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x} - t, \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} \dot{x} = 4t^3 x - t^2 x^3 + t^2, \\ x(1) = 1. \end{cases} \quad \text{(d)} \begin{cases} \dot{x} = x^4 + t^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Wykaż, że lokalnie istnieje jednoznaczne rozwiązanie tego zagadnienia. Znajdź dwie pierwsze iteracje Picarda. Wskaż jakikolwiek przedział, na którym iteracje zbiegają. Oszacuj różnicę między drugą iteracją i rozwiązaniem. Czy rozwiązanie istnieje globalnie?

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2018/19.
Seria 8. Zależność rozwiązania od parametru.

Zadanie 1. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y' = y + \mu(x + y^2), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Wyznacz $\frac{\partial y}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}$.

Zadanie 2. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{x} = \exp(\mu x) + 2t, \\ x(0) = \mu. \end{cases}$$

Wyznacz $\frac{\partial x}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}$.

Zadanie 3. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu + x^4, \\ x(0) = \mu + 1. \end{cases}$$

Wyznacz $\frac{\partial x}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}$.

Zadanie 4. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{x} = xy + t^2, \\ 2\dot{y} = -y^2, \\ (x, y)(1) = (3, \mu). \end{cases}$$

Wyznacz $\frac{\partial x}{\partial \mu}\Big|_{\mu=2}$.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2018/19.
Seria 9. Układy równań liniowych o stałych współczynnikach.

Zadanie 1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oblicz

$$\text{(a) } e^A e^B, \qquad \text{(b) } e^B e^A, \qquad \text{(c) } e^{A+B}.$$

Zadanie 2. Wyznacz rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

dla

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań $\dot{x} = Ax$ dla

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c) } A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. Niech $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ będzie rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^4, \end{cases}$$

gdzie A jest macierzą z podpunktu (c) Zadania 3. Znajdź wszystkie wektory $x_0 \in \mathbb{R}^4$ takie, że

(a) zbiór $\{x(t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ jest ograniczony.

(b) zbiór $\{x(t) \colon t \in [0, +\infty[\}$ jest ograniczony.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2018/19.
Seria 10. Nierówności różniczkowe.

Zadanie 1. Przypuśćmy, że $g\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}^n$ jest ciągła oraz $f\colon [0,\infty[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła i lipschitzowska ze względu na drugą zmienną ze stałą L. Niech ponadto funkcje $x, y \in C^1([0,\infty[,\mathbb{R}^n)$ będa rozwiązaniami równań, odpowiednio,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x) + g(t), \\ \dot{y} &= f(t,y) \end{aligned}$$

dla $t > 0$ oraz niech $x(0) = y(0)$. Wykaż, że dla $t > 0$

$$|x(t) - y(t)| \le e^{Lt} \int_0^t |g(\tau)| \mathrm{d}\tau.$$

Zadanie 2. Niech $T > 0$, niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$ oraz niech $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją ciągłą. Przypuśćmy, że

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)| = M < +\infty.$$

Niech ponadto funkcje $u, v \in C^1([0,T[,\mathbb{R}^n)$ będą rozwiązaniami równań, odpowiednio,

$$\dot{u} = f(u), \qquad \dot{v} = g(v),$$

przy czym $u(0) = v(0)$. Wykaż, że dla $t \in]0,T[$ zachodzi

$$|u(t) - v(t)| \le \frac{M}{L}\left(e^{Lt} - 1\right).$$

Zadanie 3. Niech $T > 0$, $y \in C^1([0,T[,\mathbb{R}^n)$ oraz niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L. Wykaż, że jeśli $x \in C^1([0,T[,\mathbb{R}^n)$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \\ x(0) &= y(0) \end{aligned}$$

to dla $t \in]0,T[$ zachodzi

$$|x(t) - y(t)| \le \int_0^t |\dot{y}(\tau) - f(y(\tau))| e^{L(t-\tau)} \mathrm{d}\tau.$$

Zadanie 4. Rozważmy następujące proste sformułowanie lematu Gronwalla:

Niech $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ *oraz* $T > 0$. *Jeśli* $u\colon [0, T[\to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą taką, że*

$$u(t) \leq a + b \int_0^t u(\tau) \mathrm{d}\tau$$

dla $t \in]0, T[$, *to*

$$u(t) \leq a e^{bt}$$

dla $t \in]0, T[$.

Czy założenie $b \geq 0$ można opuścić?

Zadanie 5. Rozstrzygnij prawdziwość następującego stwierdzenia.

Niech $t_* > 0$ *oraz niech* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą. Przypuśćmy, że zagadnienie początkowe*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \\ x(0) &= \lambda \end{aligned} \tag{*}$$

ma rozwiązanie klasy C^1 *na* $[0, t_*[$ *dla każdego* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Wówczas istnieje rodzina funkcji* $x_\lambda \in C^1([0, t_*[)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *taka że* x_λ *jest rozwiązaniem zagadnienia* (*) *oraz funkcja* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dana przez*

$$\lambda \mapsto x_\lambda(t)$$

jest ciągła dla $t \in]0, t_*[$.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2018/19.
Seria 11. Układy równań liniowych niejednorodnych. Równania liniowe wyższych rzędów.

Zadanie 1. Znajdź rozwiązania ogólne poniższych układów równań.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t + 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + e^t. \end{cases}$

Zadanie 2. Znajdź rozwiązania ogólne poniższych równań.

(a) $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0.$ (b) $\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4} = x.$ (c) $\dddot{x} - 2\dot{x} = 0.$ (d) $4\ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0.$
(e) $\ddot{x} + x = 2e^{3t}.$ (f) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \sin t.$ (g) $\ddot{x} - x = 2e^t - t^2.$ (h) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4t = te^{2t}.$

Zadanie 3. Znajdź rozwiązania ogólne poniższych równań.

(a) $(t^2+1)\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0.$ (b) $(1-2t^2)\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = 0.$
(c) $t^2\ddot{x} - 4t\dot{x} + 6x = 0.$ (d) $(t-2)^2\ddot{x} + (6-3t)\dot{x} + 4x = t.$

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2018/19.
Seria 12. Stabilność rozwiązań w sensie Lapunowa.

Zadanie 1. Zbadaj stabilność rozwiązania $x \equiv 0$ równania $\dot{x} = \frac{x}{1+t^2}$.

Zadanie 2. Znajdź warunki na f równoważne z

(a) stabilnością w sensie Lapunowa,

(b) asymptotyczną stabilnością

rozwiązania $x \equiv 0$ równania $\dot{x} = f(t)x$.

Zadanie 3. Wykaż, że rozwiązanie $x \equiv 0$ układu jednorodnych równań liniowych jest stabilne w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie rozwiązania tego układu są ograniczone dla $t \geq 0$. Czy jest ono wówczas również asymptotycznie stabilne?

Zadanie 4. Sprawdź, że wszystkie rozwiązania równania $\dot{x} = \sin^2 x$ sa ograniczone, ale rozwiązanie $x \equiv 0$ nie jest stabilne.

Zadanie 5. Zbadaj stabilność rozwiązania $(x, y) \equiv (0, 0)$ układu równań

$$\text{(a)} \begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + x^2y^2, \\ \dot{y} = x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x^3y. \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \dot{x} = -2\sin y - x\exp x, \\ \dot{y} = x(1 - \cos y). \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} \dot{x} = -x^2 - y^2, \\ \dot{y} = y - x^3. \end{cases} \qquad \text{(d)} \begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$$

Zadanie 6. Niech $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Rozważmy równanie

$$\dot{x} = \nabla^{\perp}\Phi(x) = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right).$$

Przypuśćmy, że x_0 jest ekstremum lokalnym Φ. Zbadaj stabilność rozwiązania $x \equiv x_0$.

Zadania z Równań różniczkowych zwyczajnych, semestr letni 2018/19.
Seria 13. Stabilność, cd. Mechanika.

Zadanie 1. Niech $a, \omega \in \mathbb{R}$. Rozważmy *równanie oscylatora harmonicznego z wymuszeniem*,

$$\ddot{x} + x = a\cos(\omega t).$$

Znajdź rozwiązanie tego równania z warunkami początkowymi $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Zadanie 2. Niech $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Rozważmy *równanie spadku gradientowego*

$$\dot{x} = -\nabla\Phi(x).$$

Przypuśćmy, że x_0 jest minimum lokalnym Φ. Wykaż, że rozwiązanie $x \equiv x_0$ jest stabilne w sensie Lapunowa. Czy musi ono być asymptotycznie stabilne?

Zadanie 3. Niech $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1. Rozważmy *równanie ruchu cząstki w potencjalnym polu sił*

$$\ddot{x} = -\nabla\Phi(x). \tag{$*$}$$

Wykaż, że *energia całkowita*

$$E(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2}|\dot{x}|^2 + \Phi(x)$$

jest całką pierwszą równania $(*)$, tzn.

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(x(t), \dot{x}(t)) = 0$$

jeśli x jest rozwiązaniem $(*)$.

Zadanie 4. Rozważmy równanie ruchu cząstki w polu potencjału $\Phi(x) = \frac{1}{4}(1-x^2)^2$. Naszkicuj jego portret fazowy. Znajdź rozwiązania stałe i zbadaj ich stabilność.

Zadanie 5. Rozważmy *równanie wahadła matematycznego*

$$\ddot{\varphi} = -\sin\varphi.$$

Naszkicuj jego portret fazowy. Znajdź rozwiązania stałe i zbadaj ich stabilność.