Seria 2. zadań z RRCz II, semestr letni 2013/14

25 lutego 2014

Zadanie 1. *("ciągowe" twierdzenie Banacha-Alaoglu)* Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha. Udowodnij, że zbiór ograniczony w X^* jest słabo-* ciągowo zwarty, tzn. jeśli (ϕ_n) jest ograniczonym ciągiem funkcjonałów z X^*, to istnieje podciąg $(\phi_{n_k}) \subset (\phi_n)$ i funkcjonał $\phi \in X^*$ taki, że $\phi_{n_k}(x) \to \phi(x)$ przy $k \to \infty$ dla każdego $x \in X$.
Wskazówka. Zauważ, że wystarczy wybrać podciąg funkcjonałów zbieżny na elementach ośrodka X i użyj argumentu przekątniowego.

Zadanie 2. *(nierówność Morreya)* Niech $n < p \leq \infty$. Udowodnij, że istnieje stała C zależna tylko od n i p taka, że

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

dla każdej $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, gdzie $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$.

Zadanie 3. Niech Ω będzie obszarem ograniczonym w $\mathbb{R}^n$ z brzegiem klasy C^1. Niech ponadto $u \in W^{1,p}(\Omega)$ dla pewnego $n < p \leq \infty$. Wykaż, że u ma reprezentanta $u^* \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ i zachodzi oszacowanie

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

gdzie C zależy od n, p i Ω.

Zadanie 4. Niech $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ dla pewnego $n < p \leq \infty$. Utożsamiając u z jej ciągłym reprezentantem, wykaż, że jest ona różniczkowalna p. w. w Ω i jej rozumiany klasycznie gradient jest p. w. równy słabemu gradientowi.

Zadanie 5. Wykaż, że jeśli $u \in W^{k,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, to u ma reprezentanta, który jest funkcją gładką na Ω.