Seria 1. zadań z RRCz II, semestr letni 2013/14

18 lutego 2014

Zadanie 1. Niech Ω, Ω' będą otwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^n$ (obszarami), $\Omega' \subset\subset \Omega$. Niech $u \in L^1(\Omega)$. Czy z założenia $\|D^h u\|_{L^1(\Omega')} \leq C$ dla wszystkich $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ wynika, że $u \in W^{1,1}(\Omega')$?

Zadanie 2. Niech $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ będzie słabym rozwiązaniem równania Laplace'a w obszarze Ω, tj.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = 0$$

dla każdej funkcji próbnej $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Wykaż, że

a) jeśli $u \in W^{2,1}_{\text{loc}}(\Omega)$, to $\Delta u = 0$ p. w. w Ω;

b) jeśli $u \in C^2(\Omega)$, to $\Delta u = 0$.

Zadanie 3. Niech $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ będzie słabym rozwiązaniem równania Laplace'a w obszarze Ω. Udowodnij następującą nierówność Cacciopoliego:

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 \leq \frac{16}{(R-r)^2} \int_{B_R(x_0)\setminus B_r(x_0)} |u-c|^2$$

dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ i koncentrycznych kul $B_r(x_0) \subset\subset B_R(x_0) \subset\subset \Omega$.
Wskazówka. Dobierz odpowiednią funkcję próbną w definicji słabego rozwiązania.

Zadanie 4. Niech $\{\psi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ będzie standardowym przybliżeniem jedności, tj.

$$\psi_\varepsilon(x) = \tfrac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\tfrac{x}{\varepsilon^n}\right),$$

zaś $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest nieujemną funkcją próbną o nośniku zawartym w $B_1(0)$ taką, że $\int \psi = 1$. Niech $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ będzie słabym rozwiązaniem równania Laplace'a w obszarze Ω. Wykaż, że splot $u_\varepsilon = \psi_\varepsilon * u$ jest dobrze określony w $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ i rozwiązuje równanie Laplace'a (w sensie klasycznym) w tym zbiorze.

Zadanie 5. Korzystajac z nierówności Cacciopoliego z zadania 3. wykaż, że jeśli $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem równania Laplace'a w obszarze Ω, to $u \in C^\infty(\Omega)$.

Zadanie 6. Niech $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ będzie słabym rozwiązaniem równania Laplace'a. Korzystając z nierówności Cacciopoliego wykaż, że

a) jeśli $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, to u jest stała;

b) jeśli $n = 2$ i u jest ograniczona, to u jest stała.

Wskazówka. Wykaż najpierw, że u spełnia nierówność

$$\int_{B_r(0)} |\nabla u|^2 \leq \vartheta \int_{B_{2r}(0)} |\nabla u|^2$$

dla każdego $r > 0$ z pewną stałą $\vartheta = \vartheta(n) < 1$.

Zadanie 7. Niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że jeśli $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem równania $-\Delta u = \lambda u$ w Ω, to $u \in C^\infty(\Omega)$.

Zadanie 8. Niech $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ będzie równa 0 p. w. poza pewnym ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ i rozwiązuje równanie

$$-\Delta u + c(u) = f \quad \text{w } \mathbb{R}^n,$$

gdzie $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest gładka i spełnia warunki $c(0) = 0$, $c' \geq 0$. Wykaż, że $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$. Czy założenia o c można osłabić?