Seria 9. zadań z GALu, semestr zimowy 2014/15

5 grudnia 2014

Zadanie 1. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź rzut ortogonalny wektora $\vec{x} = [-2, 1, 4]^T$ na płaszczyznę $x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli w przestrzeni euklidesowej/unitarnej $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $P_Z(x)$ jest rzutem ortogonalnym wektora $x \in X$ na podprzestrzeń liniową Z spełnia nierówność

$$\|x - P_Z(x)\| \leq \|x - z\|$$

dla każdego $z \in Z$. Pokaż, że równość zachodzi tylko wtedy, gdy $z = P_Z(x)$.

Zadanie 3. W przestrzeni $\mathbb{K}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń V i jej baza ortonormalna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Niech

$$A = \vec{v}_1\vec{v}_1^H + \ldots + \vec{v}_k\vec{v}_k^H.$$

i) Pokaż, że dla każdego wektora $x \in \mathbb{K}^n$ $P_V(\vec{x}) = A\vec{x}$.

ii) Jaki jest rząd macierzy A? Wyznacz $\operatorname{im} A$, $\ker A$.

Zadanie 4. W przestrzeni $\mathbb{K}^n$ rozważamy standardowy iloczyn skalarny. Niech $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ i załóżmy, że kolumny macierzy A tworzą bazę ortonormalną $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Uzasadnij, że macierz A jest nieosobliwa i oblicz A^{-1}.

Zadanie 5. W przestrzeni $\mathbb{K}^n$ dana jest baza $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$. Niech $G \in \mathbb{K}^{n,n}$ będzie macierzą Grama $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ względem standardowego iloczynu skalarnego, tj. $G_{ij} = \vec{x}_i^T\vec{x}_j$. Dla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$ niech

$$\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle_G = \vec{x}^H G\vec{y}.$$

Pokaż, że $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{K}^n$.

Zadanie 6. Oblicz kosinus kąta między przekątną n-wymiarowej kostki regularnej a jej przekątną wychodzacą z tego samego wierzchołka.

Zadanie 7. Niech $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Pokaż, że $\operatorname{rank} A = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $A^H A$ jest nieosobliwa.

Zadanie 8. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź bazę ortonormalną powstającą przez ortogonalizację Grama-Schmidta układu wektorów

$$\vec{x}_1 = [1, 2, -2]^T, \quad \vec{x}_2 = [-2, -1, 7]^T, \quad \vec{x}_3 = [5, 0, -2]^T.$$

Oblicz współrzedne wektora $[1, 0, 0]^T$ w otrzymanej bazie.