Seria 8. zadań z GALu, semestr zimowy 2014/15

21 listopada 2014

Zadanie 1. Która z poniższych funkcji zadaje iloczyn skalarny na $\mathbb{C}^3$:

i) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$,

ii) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \bar{x}_1 y_2 + \bar{x}_2 y_1 + \bar{x}_2 y_3 + \bar{x}_3 y_2$,

iii) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \bar{x}_1 y_1 + 3\bar{x}_2 y_2 + 2\bar{x}_3 y_3 + 2i(\bar{x}_2 y_3 - \bar{x}_3 y_2)$?

Zadanie 2. Niech $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ będą różnymi punktami. Dla $p, q \in \mathbb{K}[x]_n$ określamy

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{n} \overline{p(x_k)} q(x_k).$$

Pokaż, że jest to iloczyn skalarny na $\mathbb{K}[x]_n$. Oblicz normę wielomianu $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ zadaną przez $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Zadanie 3. Pokaż, że nierówność Schwarza staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\vec{x}, \vec{y}$ są liniowo zależne.

Zadanie 4. Pokaż, że kula jednostkowa jest *zbiorem wypukłym*, tzn jeśli $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{B}_X$, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, to

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in B_X.$$

Zadanie 5. W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym wyznacz wszystkie wektory prostopadłe do wektorów

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź bazę ortogonalną podprzestrzeni

$$V = \{\vec{x} \colon x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Dopełnij ją do bazy ortogonalnej $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 7. W przestrzeni euklidesowej (unitarnej) $(V, \langle\,\cdot,\,\cdot\,\rangle)$ dany jest ortogonalny układ wektorów $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$. Pokaż, że

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \vec{v}_i \right\| = \sum_{i=1}^{k} \|\vec{v}_i\|.$$

Zadanie 8. W przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\,\cdot,\,\cdot\,\rangle)$ dane są wektory $\vec{v}, \vec{w}$. Wykaż, że

i) $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2)$,

ii) $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\| = 2\|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{w}\|^2$.