Seria 7. zadań z GALu, semestr zimowy 2014/15

14 listopada 2014

Zadanie 1. Wyznacz rząd i bazy obrazu oraz jądra macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Wektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^{2013}$ są liniowo niezależne. Wyznacz bazy obrazu i jądra macierzy

$$A = [\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} + \vec{z}, \vec{x} - \vec{z}, \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}] \in \mathbb{R}^{2013,5}$$

Zadanie 3. Dany jest układ równań

i)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}.$$

Stosując eliminację Gaussa znajdź rozwiązanie ogólne.

Zadanie 4. Dana jest macierz nieosobliwa $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ i macierze $B, C \in \mathbb{K}^{n,n}$ takie, że $A = BC$. Pokaż, że macierze B i C też są nieosobliwe.

Zadanie 5. Dane są macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ takie, że $AB = 0$. Pokaż, że

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n.$$

Zadanie 6. W $\mathbb{R}^5$ dana jest podprzestrzeń liniowa V wymiaru 3. W $\mathbb{R}^{6,5}$ rozważmy podzbiór

$$X = \{A \in \mathbb{R}^{6,5} \colon V \subset \ker A\}.$$

Pokaż, że X jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{6,5}$ i znajdź jej wymiar.

Zadanie 7. Określ, dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

jest sprzeczny/niesprzeczny/oznaczony.

Zadanie 8. Niech

$$\mathfrak{so}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \colon A^T = -A\}.$$

Wykaż, że

i) nie istnieje macierz rzędu 3 należąca do $\mathfrak{so}(3)$;

ii) istnieje macierz rzędu 4 należąca do $\mathfrak{so}(4)$.