Seria 6. zadań z GALu, semestr zimowy 2014/15

7 listopada 2014

Zadanie 1. Niech F będzie ciałem. Wykaż, że następujące podzbiory $F^{n,n}$ są podprzestrzeniami liniowymi:

$$S = \{A \in F^{n,n} \colon A^T = A\}, \quad T = \{A \in F^{n,n} \colon A^T = -A\}.$$

Czy $F^{n,n} = S \oplus T$?

Zadanie 2. Wykaż, że $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ jest sumą prostą przestrzeni funkcji parzystych i funkcji nieparzystych.

Zadanie 3. W $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 0\},$$

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Znajdź bazę $U + V$ i uzupełnij ją do bazy $\mathbb{R}^4$. Czy suma $U + V$ jest prosta?

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^4$ dane są podprzestrzenie:

$$X = \mathrm{span}([2, 1, 3, 4]^T, [3, 9, 3, 9]^T, [-1, 7, -3, 1]^T),$$

$$Y = \mathrm{span}([1, -3, 3, 0]^T, [2, 5, 3, 5]^T, [1, 8, 0, 5]^T).$$

Znajdź bazy $X \cap Y$ i $X + Y$.

Zadanie 5. Rozważmy następującą podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}[x]_4$:

$$Y = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 \colon p(-1) = p(0) = p(1)\}.$$

i) Znajdź podprzestrzeń $X \subset \mathbb{R}[x]_4$ taką, że $\mathbb{R}[x]_4 = Y \oplus Z$.

ii) Znajdź bazy i określ wymiary Y i Z.

iii) Wyznacz wielomiany $p \in Y$, $q \in Z$ takie, że $x^4 = p(x) + q(x)$.

iv) Wyznacz w znalezionej wcześniej bazie Y współrzędne wielomianu $x^3 - x + a$, $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 6. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. W $\mathbb{R}^3$ dane są podprzestrzenie

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\},$$

$$V = \mathrm{span}([2, a-1, 0]^T, [1, 1, b]^T).$$

Zbadaj dla jakich wartości a, b

i) $\mathbb{R}^3 = U + V$,

ii) $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.