Seria 5. zadań z GALu, semestr zimowy 2014/15

5 listopada 2014

Zadanie 1. W $\mathbb{R}^5$ dana jest podprzestrzeń

$$V = \{\vec{x}\colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0\}.$$

i) Znajdź bazę i określ wymiar V.

ii) Dopełnij znalezioną bazę do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^5$.

iii) Znajdź współrzędne wektorów bazy standardowej $\mathbb{R}^5$ w uzyskanej bazie.

Zadanie 2. W $\mathbb{R}^{2,2}$ rozważmy podprzestrzeń

$$W = \left\{ M \in \mathbb{R}^{2,2}\colon [2,-1]M \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

Znajdź bazę i określ wymiar W.

Zadanie 3. Niech X będzie n-wymiarową przestrzenią liniową. Wykaż, że w X istnieje układ $n+1$ wektorów taki, że kazdy jego n-elementowy podukład jest liniowo niezależny.

Zadanie 4. Przypuśćmy, że układ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ jest bazą przestrzeni liniowej V. Czy

i) $\vec{v}_1,\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\ \ldots,\ \vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n$;

ii) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2,\ \vec{v}_2 + \vec{v}_3,\ \ldots,\ \vec{v}_n + \vec{v}_1$

jest bazą V?

Zadanie 5. Rozważmy podzbiór X przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}\cup\{0\}}$ złożony z ciągów $(x_n\colon n = 0, 1, \ldots)$ spełniających zależność rekurencyjną

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

i) Wykaż, że X jest przestrzenią liniową.

ii) Określ wymiar X.

iii) Wykaż, że istnieje baza X złożona z ciągów geometrycznych.

iv) Znajdź jawny wzór na n-ty wyraz ciągu z X takiego, że $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Zadanie 6. Wykaż, że nieprzeliczalny układ wektorów

$$(\mathbf{1}_{[a,\infty[} \colon a \in \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

jest liniowo niezależny.