Seria 4. zadań z GALu, semestr zimowy 2014/15

24 października 2014

Zadanie 1. Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ wektor

$$\begin{bmatrix} 1+a \\ a \\ b \end{bmatrix}^k$$

jest kombinacją liniową wektorów $[1, -1, 0]^T$ i $[-2, 1, 1]^T$?

Zadanie 2. Czy wektory

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

są liniowo niezależne?

Zadanie 3. Czy wielomian $x^4 + 1$ jest kombinacją liniową wielomianów

$$x^4 - 1, \quad x^4 - x^2, \quad x^2 - 1, \quad x^2 + x - 2?$$

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^5$ dany jest podzbiór

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$

Pokaż, że V jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^5$ i znajdź układ liniowo niezależnych wektorów rozpinający V. Z ilu wektorów może się składać taki układ?

Zadanie 5. Pokaż, że zbiór

$$Y = \{p \in \mathbb{R}[x]_4 \colon p(0) = p(1) \text{ i } p(-1) = 0\}$$

jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}[x]_4$. Znajdź wielomiany $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}[x]_4$ takie, że

$$Y = \operatorname{span}(p_1, \ldots, p_k).$$

Czy znalezione wielomiany są liniowo niezależne?

Zadanie 6. Dla jakich liczb zespolonych z wektory

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2+z^2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1+z^4\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

są liniowo niezależne?

Zadanie 7. Niech $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Wykaż, że jeśli macierze A i A^T są liniowo zależne, to $A = A^T$.

Zadanie 8. Rozważmy zbiór

$$X = \{(x_n) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon \text{ istnieje } M \in \mathbb{R}_+ \text{ tż. dla każdego } n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq Mn^{-1}\}.$$

Wykaż, że X jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 9. Pokaż, że układ funkcji $(f_k \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_k(x) = x^k)_{k=0,1,\ldots}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$. Czy to stwierdzenie pozostanie prawdziwe, jeśli wszystkie wystąpienia $\mathbb{C}$ zastąpić

i) $\mathbb{R}$,

ii) $\mathbb{Z}_p$?