Seria 3. zadań z GALu, semestr zimowy 2014/15

17 października 2014

Zadanie 1. Oblicz

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Niech $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$. Oblicz

i) $$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k,$$

ii) $$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & 0 \\ & \iddots & & \vdots \\ \lambda_n & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k.$$

Zadanie 3. Niech $n > 1$. Podaj przykład macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ takiej, że $A^n = 0$, choć $A^{n-1} \neq 0$.

Zadanie 4. Wyznacz macierze operacji elementarnych.

Zadanie 5. Znajdź macierze z $\mathbb{R}^{2,2}$ odpowiadające

i) symetrii względem osi $0y$,

ii) rzutowi na prostą $y = x$,

iii) symetrii względem początku układu współrzędnych,

iv) jednokładności o skali λ.

Zadanie 6. Niech $v \in \mathbb{R}^2$. Czy istnieje macierz $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ taka, że $Tw = w + v$ dla każdego $w \in \mathbb{R}^2$?

Zadanie 7. Niech $A = [a_{jk}] \in \mathbb{K}^{n,n}$. *Śladem* macierzy A nazywamy liczbę

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \in \mathbb{K}.$$

Wykaż, że dla dowolnych $A, B \in \mathbb{K}^{n,m}$ macierze $A^T B$ i AB^T są kwadratowe i zachodzi

$$\operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}(AB^T).$$

Zadanie 8. Znajdź macierze odwrotne do

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$,

ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 9. Wykaż, że macierz o dwóch identycznych wierszach lub kolumnach jest osobliwa.