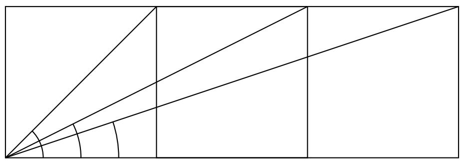
Seria 2. zadań z GALu, semestr zimowy 2014/15

10 października 2014

Zadanie 1. Wykaż, że jeśli $(F, \cdot, +, 1, 0)$ jest ciałem zawierającym elementy a, b, to

$$a \cdot b = 0 \implies (a = 0 \vee b = 0).$$

Zadanie 2. Oblicz sumę kątów zaznaczonych na poniższym rysunku:



Zadanie 2. Wyraź liczby $\sin 5\alpha$ oraz $\cos 5\alpha$ w zależności od $\sin \alpha$ oraz $\cos \alpha$.

Zadanie 3. Niech $z_0, \ldots, z_{n-1}$ będą wszystkimi pierwiastkami z jedności stopnia n. Oblicz $z_0 + \ldots + z_{n-1}$ oraz $z_0 \cdot \ldots \cdot z_{n-1}$.

Zadanie 4. Czy istnieje właściwa podgrupa okręgu $\mathbb{S}^1$ zawierająca wszystkie pierwiastki z jedności?

Zadanie 5. Rozłóż na czynniki zespolone/rzeczywiste wielomiany

i) $z^3 + 8$,

ii) $z^4 + z^2 + 1$,

iii) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

Zadanie 6. Niech p będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, a $z \in \mathbb{C}$ jego pierwiastkiem. Wykaż, że $\bar{z}$ również jest pierwiastkiem p.

Zadanie 7. Wyraź liczbę zespoloną

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{25}$$

w postaci $a + bi$.

Zadanie 8. Znajdź wszystkie $z \in \mathbb{C}$ takie, że

$$\frac{z^{10}}{\bar{z}^2} = 256.$$

Zadanie 9. Niech $a \in \mathbb{R}$. Dla $z \in \mathbb{C}$ połóżmy

$$f(z) = |i + z|^2 + az + 3.$$

Zbadaj, dla jakich a funkcja f ma własność: jeżeli $f(u) = 0$, to $f(\bar{u}) = 0$.