Seria 12. zadań z GALu, semestr zimowy 2014/15

23 stycznia 2015

Zadanie 1. Przypuśćmy, że $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ mają identyczne wielomiany charakterystyczne. Czy wynika stąd, że A i B są podobne?

Zadanie 2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz Jordana J i macierz odwracalną C takie, że $A = CJC^{-1}$. Oblicz A^{13}.

Zadanie 3. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz Jordana J i macierz odwracalną C takie, że $A = CJC^{-1}$.

Zadanie 4. Macierz $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ jest unitarna. Pokaż, że

i) jeśli λ jest wartością własną U, to $|\lambda| = 1$;

ii) jeśli λ_1, λ_2 są dwoma różnymi wartościami własnymi U, a $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ są odpowiadającymi im wektorami własnymi, to $v_1 \perp v_2$.

Zadanie 5. Czy

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$? Jeśli tak, wyznacz jej wartości własne i przestrzenie własne.

Zadanie 6. Niech $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ będzie antysymetryczna, tj. $A = -A^T$. Wykaż, że A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$ i wszystkie jej wartości własne są urojone.

Zadanie 7. Dla jakich $a, b, c \in \mathbb{R}$ odwzorowanie φ dane wzorem

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_3 - x_3y_1 + ax_1y_3 + bx_2y_1 + cx_3y_2$$

jest formą hermitowską na $\mathbb{R}^3$? Wyznacz macierz tej formy w bazie standardowej, zbadaj jej określoność i wyznacz indeksy bezwładności.

Zadanie 8. Niech dla $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$f(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Znajdź formę hermitowską $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taką, że $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = f(\vec{x})$ dla każdego $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Zbadaj określoność formy kwadratowej f i wyznacz indeksy bezwładności formy φ. Znajdź bazę $\mathbb{R}^3$ w której macierz formy φ należy do $\{0, \pm 1\}^{n,n}$.

Zadanie 9. Niech $C \in \mathbb{K}^{n,n}$ i $A = C^H C$. Przypuśćmy, że $\dim \ker A = k$. Wykaż, że dodatni indeks bezwładności A wynosi $n - k$.