Seria 11. zadań z GALu, semestr zimowy 2014/15

9 stycznia 2015

Zadanie 1. Oblicz wyznaczniki macierzy

i)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

ii)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Oblicz wyznacznik macierzy $n \times n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n+1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Oblicz wyznacznik macierzy $n \times n$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{bmatrix}$$

dla $a = 1, 2, 4$.

Zadanie 4. Kolumny macierzy $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ tworzą układ ortonormalny. Jakie wartości może przyjmować wyznacznik $\det A$?

Zadanie 5. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. Oblicz wyznacznik Vandermonde'a

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. Macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ są podobne, a $p \in \mathbb{K}[x]$ jest wielomianem. Wykaż, że macierze $p(A), p(B)$ również sa podobne.

Zadanie 7. Wyznacz wektory i wartości własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierze nieosobliwą C i diagonalną D, $C, D \in \mathbb{R}^{2,2}$ takie, że

$$D = C^{-1}AC.$$

Oblicz A^{2015}.

Zadanie 8. Wyznacz wartości własne macierzy

$$a = \begin{bmatrix} -3 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dla każdej wartości własnej λ wyznacz przestrzeń własną V_λ. Pokaż, że A jest diagonalizowalna i wyznacz taką macierz nieosobliwą C, że CAC^{-1} jest diagonalna.

Zadanie 9. Wyznacz wartości własne i odpowiadające im przestrzenie własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$? Czy jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$?

Zadanie 10. Wykaż, że macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nie jest diagonalizowalna.