Seria 10. zadań z GALu, semestr zimowy 2014/15

12 grudnia 2014

Zadanie 1. Przekształcenie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jest dane wzorem

$$f(\vec{x}) = [x_1 + x_2, x_2 + x_3]^T.$$

Wyznacz $\ker f$ oraz $\operatorname{im} f$. Znajdź macierz f w bazach $(\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ oraz $(e_1 + e_2, e_1 - e_2)$.

Zadanie 2. Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n,n}$ będzie macierzą odwracalną. Pokaż, że przekształcenie $f\colon \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}^{n,n}$ dane wzorem

$$f(X) = AX$$

jest izomorfizmem liniowym. Znajdź macierz f w bazie $\vec{e}_i\vec{e}_j^{\,T}$.

Zadanie 3. Znajdź macierz przekształcenia $f\colon \mathbb{K}[x]_n \to \mathbb{K}[x]_n$ danego wzorem $f(p) = p'$ w bazie $1, x, \ldots, x^n$.

Zadanie 4. Dla danej macierzy $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ określamy przekształcenie $f\mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}^{n,n}$ wzorem

$$f(X) = A^H X A.$$

Pokaz, że f jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy A jest odwracalna.

Zadanie 5. Macierzą przekształcenia liniowego $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazie $[1,1,1]^T, [1,2,3]^T, [1,0,1]^T$ jest

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz f w bazie standardowej $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 6. Znajdź bazę $(\mathbb{R}^3)^* = \mathbb{R}^3$ dualną do $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Znajdź współrzędne funkcjonału $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ danego wzorem

$$\varphi(\vec{x}) = 6x_1 - 2x_2$$

w tej bazie.

Zadanie 7. Niech $x_0, \ldots, x_n$ będą różnymi punktami $\mathbb{K}$. Rozważmy układ funkcjonałów $\varphi_0, \ldots, \varphi_n \in \mathbb{K}[x]_n^*$ danych wzorami

$$\varphi_k(p) = p(x_k), \quad k = 0, \ldots n.$$

i) Znajdź bazę $l_0, \ldots, l_n$ przestrzeni $\mathbb{K}[x]_n$ taką, że $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ jest bazą dualną do $p_0, \ldots, p_n$. Bazę taką nazywa się *bazą Lagrange'a* dla punktów $x_0, \ldots, x_n$.

ii) Znajdź współrzędne wielomianu $p(x) = 12 + 2014x - 12x^2$ w bazie Lagrange'a dla punktów $-2, 0, 2$.

Zadanie 8. Zidentyfikuj c_c^*, gdzie c_c jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ złożoną z ciągów, których prawie wszystkie wyrazy są równe 0.

Zadanie 9. Pokaż, że $l^2 = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ jest przestrzenią euklidesową z iloczynem skalarnym

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Znajdź rzut ortogonalny wektora $e_1 = (1, 0, 0, \ldots) \in l^2$ na podprzestrzeń $\operatorname{span}((2^{-n}))^{\perp}$.