

## Seria 1. zadań z GALu, semestr zimowy 2014/15

3 października 2014

**Zadanie 1.** Sprawdź które spośród własności: łączność, przemienność, istnienie elementu neutralnego, istnienie elementu odwrotnego mają poniższe działania na zbiorze liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$

- i) odejmowanie  $(a, b) \mapsto a - b$ ,
- ii) średnia arytmetyczna  $(a, b) \mapsto \frac{a+b}{2}$ ,
- iii) działanie  $\diamond: (a, b) \mapsto a \diamond b = a + ab + b$ .

**Zadanie 2.** Wykaż, że jeśli  $(G, \cdot, e)$  jest grupą zawierającą elementy  $a, b, c$ , to

- i)  $a^{-1} = b^{-1} \implies a = b$ ,
- ii)  $a \cdot c = b \cdot c \implies a = b$ .

**Zadanie 3.** Ile różnych działań  $\cdot$  można zadać na zbiorze

- i) dwuelementowym  $X = \{e, a\}$ ,
- ii) trójelementowym  $X = \{e, a, b\}$ ,
- iii) czteroelementowym  $X = \{e, a, b, c\}$

aby trójka  $(X, \cdot, e)$  była grupą? Narysuj tabelkę grupową dla każdej z otrzymanych grup.

**Zadanie 4.** Czy grupa permutacji zbioru  $n$ -elementowego  $(S_n, \circ, id)$  jest przemienna?

**Zadanie 5.** Wykaż, że jeśli  $(F, \cdot, +, 1, 0)$  jest ciałem zawierającym elementy  $a, b$ , to

- i)  $0 \cdot a = 0$ ,
- ii)  $-a = (-1) \cdot a$ ,
- iii)  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ .

**Zadanie 6.** Wykaż, że

- i) równanie  $x^2 + x + 1 = 0$  nie ma rozwiązań w ciele  $\mathbb{Z}_2$ ,
- ii) równanie  $-2y^2 + x^2 + x + 5 = 0$  nie ma rozwiązań spośród par liczb całkowitych.

**Zadanie 7.** Wyraż liczbę zespoloną

$$\frac{(2+i)(3-i) + (2+3i)(3-4i)}{3+i}$$

w postaci  $a + bi$ .

**Zadanie 8.** Wykaż, że dla dowolnych  $z, w \in \mathbb{C}$  zachodzi

$$||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

**Zadanie 9.** Wykaż, że liczba  $z \in \mathbb{C}$  jest rzeczywista wtedy i tylko wtedy, gdy  $z = \bar{z}$ .

**Zadanie 10.** Rozwiąż w  $\mathbb{C}$  równanie

$$z^3 + |z|^2 + z = 0.$$

**Zadanie 11.** Wyznacz wszystkie liczby zespolone  $z$  takie, że liczba

$$\frac{1+z}{1-z}$$

jest rzeczywista.