Zadanie 4

$W = \text{lin}(f, g, h) \qquad W < (\mathbb{R}^5)^*$

$f((x, y, z, t, s)) = x + y + z$

$g((x, y, z, t, s)) = t + s$

$h((x, y, z, t, s)) = x + y + z + t + s$

$W = \text{lin}(f, g, h) = \text{lin}(f, g) \quad \Leftarrow \quad h = f + g.$

$$\dim \left({(\mathbb{R}^5)^*}/{W} \right) = \dim (\mathbb{R}^5)^* - \dim W = 3$$

Należy zatem znaleźć dopełnienie do bazy $(\mathbb{R}^5)^*$ tzn takie funkcjonały i, j, k, że $\text{lin}(f, g, i, j, k) = (\mathbb{R}^5)^*$

Niech $i((x, y, z, t, s)) = x$

$j((x, y, z, t, s)) = y$

$k((x, y, z, t, s)) = s$

Sprawdzam czy f, g, i, j, k są liniowo niezależne.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -w_1 - w_2 \\ -w_3 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem $\text{lin}(f, g, i, j, k) = (\mathbb{R}^5)^*$

Zatem baza ${(\mathbb{R}^5)^*}/{W}$ jest: $\{ i + W ; j + W ; k + W \}$.