Zadanie 2.

$\mathcal{A}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$\alpha_1=(1,2,1)$

$\alpha_2=(1,1,0)$

$\alpha_3=(0,0,1)$

$V_1=\mathrm{lin}(\alpha_1,\alpha_2)$ $\quad V_2=\mathrm{lin}(\alpha_3)$

π - rzut na V_1 wzdłuż V_2

(i)

$$M(\pi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M(\pi^*)_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{A}^*}=\left[M(\pi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\right]^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M(\pi^*)_{st}^{st}=M(\pi^*)_{st^*}^{st^*}=\left[M(\pi)_{st}^{st}\right]^T=\left[M(id)_{\mathcal{A}}^{st}\ M(\pi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\ M(id)_{st}^{\mathcal{A}}\right]^T=$$

$$=\left[M(id)_{\mathcal{A}}^{st}\ M(\pi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\left[M(id)_{\mathcal{A}}^{st}\right]^{-1}\right]^T=\left[\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&0\\2&-1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\right]^T=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(ii) Szukamy $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}-w_2-w_3\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&-1&-1\\1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}\\-w_1\\ \\ \end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&-1&-1\\1&0&0&-1&2&+1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&2&1\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1^* & \alpha_2^* & \alpha_3^*\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}-1&2&1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

$\alpha_1^*=-x_1+x_2$

$\alpha_2^*=2x_1-x_2$

$\alpha_3^*=x_1-x_2+x_3$

$$A^*=\left(A^{-1}\right)^T=\begin{bmatrix}-1&1&0\\2&-1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$$