Zadania domowe z GALu I, seria 9.

Zadanie 1. Niech $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie dane wzorem

$$\phi((x_1, x_2)) = (x_1 - 2x_2, -2x_1 + 4x_2, 3x_1 + tx_2).$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie ϕ^* nie jest epimorfizmem? Dla każdego takiego t znajdź bazę przestrzeni $\operatorname{im}\phi^*$.

Zadanie 2. Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą $\mathbb{R}^3$ składającą się z wektorów

$$\alpha_1 = (1, 2, 1), \quad \alpha_2 = (1, 1, 0), \quad \alpha_3 = (0, 0, 1).$$

Niech $V_1 = \operatorname{lin}(\alpha_1, \alpha_2)$, $V_2 = \operatorname{lin}(\alpha_3)$. Niech π będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2.

i) Znajdź macierze $M(\pi^*)^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{A}^*}$ oraz $M(\pi^*)^{st}_{st}$.

ii) Podaj współrzędne w bazie $\mathcal{A}^*$ funkcjonałów tworzących bazy (wybrane przez siebie) $\operatorname{im}\pi^*$ oraz $\ker\pi^*$. Podaj wzory na te funkcjonały.

iii) Podaj wzór funkcjonału $\pi^*(f)$, gdzie $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ jest dany wzorem

$$f((x, y, z)) = x + y + z.$$

Zadanie 3. Niech

$$W = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty \colon x_{2k} = x_{2k+1} \quad \forall k = 1, 2, \ldots\}.$$

Znajdź (wypisz wzór) przekształcenie liniowe $\phi\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ takie, że $\ker\phi = W$, $\operatorname{im}\phi = \mathbb{R}^\infty$. Używając twierdzenia o izomorfizmie wywnioskuj, że przestrzeń ilorazowa $\mathbb{R}^\infty/W$ jest izomorficzna z $\mathbb{R}^\infty$.

Zadanie 4. Niech $W = \operatorname{lin}(f, g, h)$ będzie podprzestrzenią $(\mathbb{R}^5)^*$ rozpiętą na funkcjonałach danych wzorami

$$f((x, y, z, t, s)) = x + y + z, \qquad g((x, y, z, t, s)) = t + s,$$

$$h((x, y, z, t, s)) = x + y + z + t + s.$$

Podaj przykład bazy przestrzeni ilorazowej $(\mathbb{R}^5)^*/W$.

Zadanie 5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$ i niech $a \in \mathbb{K}$. Wykaż, że jeśli $\phi\colon V \to V$ jest jednokładnością o skali a, to $\phi^*\colon V^* \to V^*$ też jest jednokładnością o skali a.