Zadanie 1

(i)

Weźmy: $\alpha_1=(1,0,1,0)$ $\alpha_2=(0,1,0,1)$

$\alpha_3=(0,1,-1,0)$ $\alpha_4=(-1,0,1,0)$

Sprawdzam, czy są liniowo niezależne:

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&-1&0\\-1&0&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&-1&-1\\0&0&2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Zatem $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ są liniowo niezależne.

$V_1=\mathrm{lin}(\alpha_1,\alpha_2)$

$V_2=\mathrm{lin}(\alpha_3,\alpha_4)$

$\dim V_1+\dim V_2=4=\dim\mathbb{R}^4$

$\dim(V_1\cap V_2)=0$ więc $V_1\oplus V_2=\mathbb{R}^4$

(ii) $M(\psi\circ\varphi)_\mathcal{A}^\mathcal{A}=M(\psi)_\mathcal{A}^\mathcal{A}\,M(\varphi)_\mathcal{A}^\mathcal{A}$

ψ jest symetrią względem V_2 wzdłuż V_1. Zatem:

$$M(\psi)_\mathcal{A}^\mathcal{A}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

φ jest rzutem na V_1 wzdłuż V_2

$$M(\varphi)_\mathcal{A}^\mathcal{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M(\psi\circ\varphi)_\mathcal{A}^\mathcal{A}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ψ jest symetrią zatem

$$M(\psi^{-1})_\mathcal{A}^\mathcal{A}=M(\psi)_\mathcal{A}^\mathcal{A}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Zatem

$$M(\varphi\circ\psi^{-1})=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$