Zadania domowe z GALu I, seria 7.

Zadanie 1. Niech V będzie przestrzenią liniową, niech V_1, V_2 będą jej podprzestrzeniami i niech $\phi\colon V_1 \to V_2$ będzie izomorfizmem.

i) Udowodnij, że jeśli $\dim V < \infty$, to istnieje izomorfizm $\psi\colon V \to V$ taki, że $\psi(v) = \phi(v)$ dla każdego $v \in V_1$.

ii) Czy powyższe twierdzenie jest prawdziwe bez założenia $\dim V < \infty$?

Zadanie 2. Niech $\phi\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ będzie zadane przez iloczyn macierzy

$$\phi(X) = AX, \quad \text{gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & t \end{bmatrix}$$

Znajdź $M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$, gdzie $\mathcal{A} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}\}$,

$$\epsilon_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \epsilon_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \epsilon_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \epsilon_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ ϕ jest izomorfizmem?

Zadanie 3. Niech V, W będa przestrzeniami liniowymi. Niech $\phi\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, niech $\psi\colon V \to V$ będzie izomorfizmem.

i) Wykaż, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\xi\colon V \to W$ takie, że $\phi = \xi \circ \psi$.

ii) Przypuśćmy, że $V = W = \mathbb{R}^3$ oraz

$$M(\phi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M(\psi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie $\mathcal{A}$ jest pewną bazą $\mathbb{R}^3$. Znajdź $M(\xi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$.

Zadanie 4. Niech $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\phi((x, y, z)) = (x - y + 2z, 3x + y + z).$$

Znajdź takie bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że

$$M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$ i niech $a \in \mathbb{K}$. Przekształcenie $\phi\colon V \to V$ dane wzorem $\phi(v) = av$ dla $v \in V$ nazywamy *jednokładnością (o skali a)*. Niech $W = \mathrm{lin}((1,0,0),(0,1,0)) \subset \mathbb{R}^3$. Niech

$$X = \{\phi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)\colon \phi|_W \text{ jest jednokładnością}\}$$

i) Udowodnij, że X jest podprzestrzenią liniową $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

ii) Znajdź wymiar X.