GAL SERIA $\underline{VI}$ Małgorzata Nguyen

1pkt

(5)

(i) $V = \{$ ciągi zbieżne do granicy$\}$

Czy V jest podprzestrzenią ciągów w $\mathbb{R}$?

$a_n, b_n \in V$ $\quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

1° $a_n + b_n \in V$?

$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

zatem $a_n + b_n$ zbieżny, czyli $a_n + b_n \in V$

2° $x \in K$

$xa_n \in V$?

$\lim_{n\to\infty} xa_n = xa$

zatem xa_n zbieżny, czyli $xa_n \in V$

$\phi : V \to \mathbb{R}$?

weźmy $a \in K$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $x_n \in V$

$\phi((x_n)) = \lim x_n$

1° $\phi((ax_n)) = \lim ax_n$ $\quad$ bo $\lim_{n\to\infty} ax_n = ax$

$\qquad\qquad \parallel \leftarrow$ prawda gdyż $\qquad \parallel$

$a\phi((x_n)) = a\lim x_n$ $\quad a \lim_{n\to\infty} x_n = ax$

2° $x_n, y_n \in V$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$

$\phi((x_n + y_n)) = \lim(x_n + y_n) = x + y$

$\phi((x_n)) + \phi((y_n)) = \lim x_n + \lim y_n = x + y$

ϕ jest przekształceniem liniowym.

(ii) $V = \{$ciągi ograniczone$\}$ $\quad \phi((x_n)) = \limsup x_n$

weźmy $x_n, y_n \in V$

$x_n + y_n \in V$?

~~ogr górne~~ $\forall x \in x_n \;\; x < a \quad a, b \in \mathbb{R}$

$\forall y \in y_n \;\; y < b$

ogr górne $\forall x \in x_n \; \exists a \in \mathbb{R} \;\; x < a$

$\forall y \in y_n \; \exists b \in \mathbb{R} \;\; y < b$

czyli $\forall x+y \in x_n + y_n \; \exists a+b \;\; x+y < a+b$

analogicznie ograniczenie dolne

$cx_n \in V$?

ogr. górne: $\forall_{x \in x_n} \exists_{a \in \mathbb{R}} \quad x < a$

$cx < \infty$

analogicznie ogr. dolne $\Downarrow$ V jest podprzestrzenią $\checkmark$

ϕ

$\phi((x_n)) = \limsup x_n \qquad x_n, y_n \in V$

$\phi((x_n + y_n)) \overset{?}{=} \phi((x_n)) + \phi((y_n))$

weźmy $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$

$\limsup (x_n + y_n) = 0$

$\neq$

$\limsup x_n + \limsup y_n = 1 + 1 = 2 \qquad \phi$ nie jest przekształceniem $\checkmark$

(iii) $V = \{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$

$\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

$x_n, y_n \in V$

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \overset{?}{<} \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < \infty$

$\uparrow$ nierówność trójkąta $\qquad$ z tego wiemy

$\sum_{n=1}^{\infty} |a x_n| \overset{?}{<} \infty \qquad a \in K$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a| |x_n| = |a| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \right) < \infty$ podprzestrzeń $\checkmark$ $\checkmark$

$\phi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

$\phi((a x_n)) \overset{?}{=} a(\cancel{x_n}) \; a(\phi((x_n)))$

$\sum_{n=1}^{\infty} a x_n \overset{?}{=} a \sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad \checkmark$

$\phi((x_n + y_n)) \overset{?}{=} \phi((x_n)) + \phi((y_n))$

$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ prawda, bo $\sum |x_n| < \infty$ $\land$ $\sum |y_n| < \infty$

$\checkmark$