Zadanie 2

1) $\varphi(\mathrm{lin}((1,1,1,2),(0,1,0,1)) = \mathrm{lin}((1,1,1,1))$

2) $\varphi(\mathrm{lin}((0,0,2,1),(0,1,2,t)) = \mathrm{lin}((2,2,0,-1))$

3) $\mathrm{im}\,\varphi = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2\}$

Z 3) wiemy że $\mathrm{im}\,\varphi = \mathrm{lin}((1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$

Zatem $\dim \mathrm{im}\,\varphi = 3$

Sprawdzamy jaki jest wymiar $U = \mathrm{lin}((1,1,1,2),(0,1,0,1)) \cup \mathrm{lin}((0,0,2,1),(0,1,2,t))$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & t \end{bmatrix} - w_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & t-1 \end{bmatrix} - w_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t-2 \end{bmatrix}$$

a) Dla $t=2$. $\dim U = 3$

b) wpp $\dim U = 4$

ad b) Rozważmy teraz przypadek $t \neq 2 \Rightarrow \dim U = 4$

Sprawdzam jaki wymiar ma $V = \varphi(\mathrm{lin}((1,1,1,2),(0,1,0,1)) \cup \varphi(\mathrm{lin}((0,0,2,1),(0,1,2,t))$

$$V: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - 2w_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Zatem $\dim V = 2$ ~~Zatem~~

Zauważmy jednakże: $U = \mathbb{R}^4 \wedge \mathrm{lin}((1,1,1,2),(0,1,0,1)(0,0,2,1),(0,1,2,t))$ jest bazą $\mathbb{R}^4$.

[Z uwagi 4,7 (str 53) wiemy że jeżeli $\alpha_1, \dots \alpha_n$ rozpina W i $\varphi: W \to W'$ to $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \dots \varphi(\alpha_n)$ rozpina $\mathrm{im}\,\varphi$]

Korzystając z uwagi widzimy że ~~$\mathrm{im}\,\varphi$ nie~~ $\varphi(1,1,1,2), \varphi(0,1,0,1), \varphi(0,0,2,1)$ $\varphi(0,1,2,t)$ nie rozpina $\mathrm{im}\,\varphi$ gdyż $\dim \mathrm{im}\,\varphi = 3$, a $\dim V = 2$

Ad a) ~~...~~

Dla $t=2$ pokaż przykład takiego przekształcenia w bazie

$\cancel{\varphi}$ $(1,1,1,2),(0,1,0,1),(0,0,2,1),(0,0,0,1)$

$$\varphi((1,1,1,2))=(2,2,2,2)$$
$$\varphi((0,1,0,1))=(0,0,0,0)$$
$$\varphi((0,0,2,1))=(2,2,0,-1)$$
$$\varphi((0,0,0,1))=(-2,-2,2,1)$$

Sprawdzenie

$$\varphi(\text{lin}((1,1,1,2),(0,1,0,1)))=\text{lin}((2,2,2,2))=\text{lin}((1,1,1,1))$$

$\cancel{\varphi(\text{lin}((0,0,2,}$

$$\varphi((0,1,2,2))=\varphi((0,1,0,1))+\varphi((0,0,2,1))=(2,2,0,-1)$$

$$\varphi(\text{lin}((0,0,2,1),(0,1,2,2)))=\text{lin}(2,2,0,-1)$$

$$\dim \text{im}\,\varphi=\dim(\text{lin}((2,2,2,2),(0,0,0,0),(2,2,0,-1),(-2,-2,2,1)))=3$$

bo:
$$\begin{bmatrix}2&2&2&2\\0&0&0&0\\2&2&0&-1\\-2&-2&2&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdot\frac{1}{2}\\ \\ -w_1\\ +w_2\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&-2&-3\\0&0&4&3\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ +2w_3\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&-2&-3\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$$

Ponadto zauważmy, że $\text{lin}((2,2,2,2),(2,2,0,-1),(-2,-2,2,1))=$

$$=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R} \mid x_1=x_2\}$$