Zadania domowe z GALu I, seria 5.

Zadanie 1. Rozpatrzmy podprzestrzenie $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^4$,

$$V_1 = \mathrm{lin}((1,1,0,1),(1,0,1,t),(1,2,2,1)),$$

$$V_2 = \mathrm{lin}((0,1,2,0),(1,0,t,1)).$$

i) Znajdź $\dim(V_1 + V_2)$ oraz $\dim(V_1 \cap V_2)$ w zależności od $t \in \mathbb{R}$.

ii) Niech $Z = V_1 + V_2$. Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ znajdź taką podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^4$, że $\mathbb{R}^4 = Z \oplus W$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy podprzestrzenie $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^4$,

$$V_1 = \mathrm{lin}((1,-1,-1,-1),(-3,4,0,1),(-5,6,2,3)),$$

$$V_2 = \mathrm{lin}((1,t,2,1),(2,2t,t,2)).$$

i) Znajdź układ równań opisujący V_1.

ii) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$?

Zadanie 3. Wykaż, że $F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$, gdzie

$$W_1 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f(-x) = f(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}\},$$

$$W_2 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f(-x) = -f(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}\}.$$

Zadanie 4. i) Niech V będzie przestrzenią liniową i niech W_1, W_2 będą podprzestrzeniami liniowymi V. Udowodnij, że jeśli $W_1 \cup W_2$ jest podprzestrzenią liniową V, to $W_1 \subset W_2$ lub $W_2 \subset W_1$.

ii) Czy istnieje taka przestrzeń liniowa V (nad pewnym ciałem $\mathbb{K}$), że dla pewnych jej podprzestrzeni właściwych W_1, W_2, W_3 zachodzi $V = W_1 \cup W_2 \cup W_3$?

Zadanie 5. Niech $\mathfrak{so}(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\colon A^T = -A\}$ będzie zbiorem antysymetrycznych macierzy $n \times n$ o współczynnikach rzeczywistych.

i) Wykaż, że jeśli $A \in \mathfrak{so}(3)$, to rząd $A \leq 2$.

ii) Podaj przykład macierzy $A \in \mathfrak{so}(4)$ takiej, że rząd A jest równy 4.