ZADANIE 4

$Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ - najmniejsze podciało $\mathbb{R}$ zawierające $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

1) Szukamy bazy $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ nad Q

- $\forall a \in Q \quad a\sqrt{2} \in Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
- $\forall a \in Q \quad a\sqrt{3} \in Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
- $a \in Q \quad b \in Q \qquad a\sqrt{2} \cdot b\sqrt{3} = ab\sqrt{6} \in Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ zatem $\forall p \in Q$ $p\sqrt{6} \in Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$
- $a \in Q \quad b \in Q \qquad a\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2} = 2ab \in Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ zatem $Q \subset Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$

Pokażę że ~~wsz~~ elementy $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ mają postać $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} : a,b,c,d \in Q$

- $v, w \in Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ $c_1 v + c_2 w \in (Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}))$.

$e_1(a_1 + b_1\sqrt{2} + c_1\sqrt{3} + d_1\sqrt{6}) + e_2(a_2 + b_2\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} + d_2\sqrt{6}) =$

$= (e_1 a_1 + e_2 a_2) + (e_1 b_1 + e_2 b_2)\sqrt{2} + (e_1 c_1 + e c_2)\sqrt{3} + (e_1 d_1 + e_2 d_2)\sqrt{6}$

Ale ta liczba również $\in Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ bo jest wymaganej postaci.

- $v, w \in Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $v \cdot w \in Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$(a_1 + b_1\sqrt{2} + c_1\sqrt{3} + d_1\sqrt{6})(a_2 + b_2\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} + d_2\sqrt{6}) =$

$(a_1 a_2 + 2 b_1 b_2 + 3 c_1 c_2 + 6 d_1 d_2) + \sqrt{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1 + 3 c_1 d_2 + 3 c_2 d_1)$

$+ \sqrt{3}(a_1 c_2 + a_2 c_1 + 2 b_1 d_2 + 2 b_2 d_1) + \sqrt{6}(a_1 d_2 + a_2 d_1 + b_2 c_1 + b_1 c_2)$

$\in Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Zatem $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{ a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} : a, b, c, d \in Q \}$

łatwo sprawdzić że spełnione są warunki 1-8 aksjomatów ciała (w rozwiązaniu tego nie wymagałem).

i) $\dim Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = 4 \qquad \text{lin}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$.

~~Przy czym widać że~~ Należy jednak pokazać że $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ są nzal. liniowo

$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0 \qquad a,b,c,d \in Q$

Zatem $a = 0$ gdyż $b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0 \vee b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ - niewymierne

Zatem $b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$

$d\sqrt{6} = -(b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) \Rightarrow |d\sqrt{6}| = |b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| \,|^2$

$6d^2 = 2b^2 + 3c^2 + |cb|\sqrt{6}$