# Zadania domowe z GALu I, seria 4.

**Zadanie 1.** Niech $a \in \mathbb{R}$ i niech $U$ będzie następującym układem równań w $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 2t = a^2 + a \\ 2x + 7y + (1-a^2)z^6 - 2t = 0 \\ x + 4y + 2z - 5t = -a(a+1) \end{cases}$$

i) Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ zbiór rozwiązań układu $U$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^4$? Odpowiedź uzasadnij.

ii) Dla wszystkich takich $a$ znajdź bazę przestrzeni rozwiązań.

**Zadanie 2.** Niech $v_1 = (1,4,2,1)$, $v_2 = (2,9,3,3)$, $v_3 = (1,5,0,2)$, $v_4 = (1,2,5,-1) \in \mathbb{R}^4$.

i) Czy układ $v_1$, $v_2$, $v_3$ jest liniowo niezależny?

ii) Czy wektor $v_4$ jest kombinacją liniową wektorów $v_1$, $v_2$, $v_3$?

iii) Podaj przykład takiego wektora $w \in \mathbb{R}^4$, że układ $v_1$, $v_2$, $v_4$, $w$ jest bazą $\mathbb{R}^4$.

iv) Znajdź ostatnią współrzędną (przy $w$) wektora $v_3$ w otrzymanej bazie.

**Zadanie 3.** Niech $V$ będzie przestrzenią liniową, $\dim V \geq n$. Udowodnij, że istnieje liniowo zależny układ wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1} \in V$ taki, że każdy jego podukład liczący $n$ wektorów jest liniowo niezależny.

**Zadanie 4.** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ jest z definicji najmniejszym podciałem $\mathbb{R}$ zawierającym $\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{3}$.

i) Znajdź bazę i wymiar przestrzeni liniowej $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ nad $\mathbb{Q}$.

ii) Podaj współrzędne wektora $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ w znalezionej przez siebie bazie.

**Zadanie 5.** Udowodnij, że układ wektorów $\{f_c \colon c \in \mathbb{R}\} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, gdzie $f_c(x) = |x-c|$, $x \in \mathbb{R}$ jest liniowo niezależny. Wywnioskuj stąd, że przestrzeń liniowa funkcji ciągłych $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nad $\mathbb{R}$ nie ma przeliczalnej bazy.