

# Ćwiczenie 5

Ł. Szwed

a)  $|1 - \bar{z}| \geq |z + 2i|$

$z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$

$|1 - a + ib| \geq |a + ib + 2i|$

$\sqrt{(1-a)^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2 + (2+b)^2}$

Podnieśli obie strony są większe / równe zero zatem możemy podnieść do kwadratu

$(1-a)^2 + b^2 \geq a^2 + (2+b)^2$

$1 + a^2 - 2a + b^2 \geq a^2 + b^2 + 4 + 4b$

$b \leq -\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}$

b)  $\text{Im} (1+i)z^2 < 0$

$1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$

$(1+i)z^2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) |z|^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$

$= \sqrt{2} |z|^2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + 2\alpha \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + 2\alpha \right) \right)$

$\Rightarrow \text{Im} (1+i)z^2 = \sqrt{2} |z|^2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + 2\alpha \right) < 0$

$\Leftrightarrow \sin \left( \frac{\pi}{4} + 2\alpha \right) < 0$

$\Leftrightarrow \pi + 2k\pi < \frac{\pi}{4} + 2\alpha < 2\pi + 2k\pi$

$\frac{3\pi}{8} + k\pi < \alpha < \frac{7\pi}{8} + k\pi$

## PUNKTACJA

i) 0,5 pkt

ii) 0,5 pkt

-0,25 pkt za błąd w rysunku

-0,25 za błędy obliczeniowe np zły zapis trygonometryczny