Pożytki z przestrzeni BV, semestr letni 2016/17 – seria 8. zadań

9 maja 2017

Uwaga. We wszystkich zadaniach z tej serii:

- $B_r(x)$ oznacza **domkniętą** kulę o środku w $x \in \mathbb{R}^n$ i promieniu r,
- $u \in BV(\mathbb{R}^n)$,
- $u^+(x) = \inf\{t \in \mathbb{R}\colon \lim_{r\to 0^+} r^{-n}\mathcal{L}^n(B_r(x) \cap \{u > t\}) = 0\}$ dla $x \in \mathbb{R}^n$,
- $u^-(x) = \sup\{t \in \mathbb{R}\colon \lim_{r\to 0^+} r^{-n}\mathcal{L}^n(B_r(x) \cap \{u < t\}) = 0\}$ dla $x \in \mathbb{R}^n$,
- $u^* = \frac{u^+ + u^-}{2}$,
- $J_u = \{x \in \mathbb{R}^n\colon u^+(x) > u^-(x)\}$.

Zadanie 1 (Lemat 1, s. 210 w [EG]). Wykaż, że $u^+, u^-\colon \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ są funkcjami borelowsko mierzalnymi.

Zadanie 2 (Twierdzenie 1, s. 210 w [EG]). Wykaż, że istnieje ciąg S_k hiperpowierzchni klasy C^1 w $\mathbb{R}^n$ taki, że

$$\mathcal{H}^{n-1}\left(J_u \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) = 0.$$

Zadanie 3 (Twierdzenie 2, s. 211 w [EG]). Wykaż, że $-\infty < u^- \le u^+ < +\infty$ $\mathcal{H}^{n-1}$-prawie wszędzie w $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 4 (Twierdzenie 3, s. 213 w [EG]). Dla $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}^n$ oznaczmy

- $H_\nu^-(x) = \{y \in \mathbb{R}^n\colon (y-x)\cdot\nu \le 0\}$,
- $H_\nu^+(x) = \{y \in \mathbb{R}^n\colon (y-x)\cdot\nu \ge 0\}$.

Wykaż, że

- dla $\mathcal{H}^{n-1}$-p. w. $x \in \mathbb{R}^n \setminus J_u$

$$\lim_{r\to 0^+} r^{-n} \int_{B_r(x)} |u - u^*(x)|^{\frac{n}{n-1}} = 0,$$

- dla $\mathcal{H}^{n-1}$-p. w. $x \in J_u$ istnieje $\nu = \nu(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ taki, że

$$\lim_{r\to 0^+} r^{-n} \int_{B_r(x)\cap H_\nu^\pm(x)} |u - u^\pm(x)|^{\frac{n}{n-1}} = 0.$$